Identificando decomposições em fatores primos

Por: Allan Costa Jardim / 30 de Março de 2018

Código: **MAT6_03NUM07**

Sobre o Plano

Este plano de aula foi elaborado pelo Time de Autores NOVA ESCOLA

Autor: Allan Costa Jardim

Mentor: Rodrigo Morozetti Blanco

Especialista de área: Luciana Maria Tenuta de Freitas

Habilidade da BNCC
(EF06MA04) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000;

(EF06MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor;

Objetivos específicos

Identificar que números inteiros podem ser decompostos em fatores primos, identificar que a fatoração em fatores primos é única.

Conceito-chave

Múltiplos, fatores, divisibilidade, números primos, números compostos.

Recursos necessários

Folha de papel A4 branca;
Atividades impressas em folhas, coladas no caderno ou não.
Arquivos anexos impressos (tabuleiro numérico (neste link) e retângulos para confecção de fichas (neste link));
Grãos diversos (feijão, milho, arroz, etc...).

Materiais complementares

Documento
Guia de Intervenção
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/A6tFJzWBZT2bgtCQnbzA4fxsVWGbe3GpHhb3UXmgE74aqh5EnU6DkqBXkbYy/guiainterv-mat6-03num07.pdf

Documento
Resolução da Atividade Principal
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/RQrRhdP4MnG8B4CNR8nkSQS6Wsv2tywNEgXGT2jpfVPpn2cH4yeEvVdTKBYd/resol-ativaula-mat6-03num07.pdf

Documento
Resolução da Atividade Complementar
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/2agprZZ5UXsAYmCGWPpfHmZc9qPAR8HwJCy9V76WpM7N64E4fkfV8wBbPkZF/resol-ativcomp-mat6-03num07.pdf

Documento
Resolução da Atividade do Raio X
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/r58bhaSngtdeNj6QKy6hYbpYkEYAPrUbuszy9ByfW5k5fXVQ7FSKdQAtukWg/resol-ativraiox-mat6-03num07.pdf

Documento
Resolução da Atividade de Aquecimento
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/NyADF2GbQBqzMJ7A2JznNEVtypfeznWzB7JtccXjpkj4XdaZNzavkaZkdJfH/resol-ativaquec-mat6-03num07.pdf

Documento
Material Complementar Fluxograma, Algorítimos, Matemática e Tecnologia
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/PfFXTNGVGz9xBd7FeDpZ4kfUz53EZevJxWY39JmqSbhKg7CSP37WUHdSPFaV/fluxogramas-algoritmos-matematica-e-tecnologia.pdf

Documento
Material Complementar Fichas para Atividade Principal
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/mpe4TmpF93pbnteaU3AdkqhPdvHPtj7h5j4AKGPUZ2hZ82GDaYVvtMBSz9A2/fichas-a-serem-utilizadas-pelos-alunos-na-atividade-principal-mat6-03num07.pdf

Documento
Material Complementar Tabuleiro Atividade Principal
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/fgrCEjkUzRafK32reHerRBbn4N5K3nZCrATm93CcKPFgr2eUP9p9ESPUYk4G/tabuleiro-atividade-principal-mat6-03num07.pdf

Documento
Texto Complementar - Álgebra dos Inteiros X Matemática do Contínuo
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/wUrHvK2rF5DbKC3GVJyDmshr9URpGu27ATBEWUDV2yfxKJYU7YMDRfTzsraM/texto-complementar-algebra-dos-inteiros-x-matematica-do-continuo.pdf

Documento
Atividade Principal
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/XuH2EucMuHNkdK62CQ6qSPpFcxvsUqX3UjyNJnNEbv9cs6pcFUcd5e4Hm6Aw/ativaula-mat6-03num07.pdf

Documento
Atividade Complementar
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/T6pxrCUbDt7KTMER6hqQtfd2SSsEswUB7vJPQXqPcHTRyCqndnSzP3vKdxVY/ativcomp-mat6-03num07.pdf

Documento
Atividade de Raio X
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/9gYEsz8XtrNffewtQVnTYWjGq58AFr93v9fWezyuWjEMvASNyTY49U7cqrEc/resol-ativraiox-mat6-03num07.pdf

Documento
Atividade de Aquecimento
https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/jQ8hzUrY4nPERpU9BkDPww3EUamEj8dvT5QG9VAswZmEgUmAV5SYhREaCKwe/resol-ativaquec-mat6-03num07.pdf

Identificando decomposições em fatores primos

Slide 1 **Resumo da Aula**

Orientações:Este slide não é um substituto para as anotações para o professor e não deve ser apresentado para os alunos. Trata-se apenas de um resumo da proposta para apoiá-lo na aplicação do plano em sala de aula.
Orientação: Leia atentamente o plano inteiro e as anotações para o professor. Busque antecipar quais questões podem surgir com a sua turma e preveja adequações ao nível em que seus alunos estão. Compartilhe o objetivo da aula com os alunos antes de aplicar proposta.
Na aba "Sobre o plano", confira os conhecimentos que sua turma já deve dominar para seguir essa proposta.
Se quiser salvar o plano no seu computador, faça download dos slides na aba "Materiais complementares". Você também pode imprimi-lo clicando no botão "imprimir".

Atividades	Objetivo principal	Ação principal	Tempo sugerido
Aquecimento	Observar que dado um conjunto de números primos, existem alguns números compostos que podem ser escritos como produto destes fatores, outros não.	Efetuar multiplicações entre números primos dados e tentar obter resultados dados.	13 min.
Atividade Principal	Identificar decomposições de fatores primos de números compostos diversos.	Utilizar fatores à escolha e suas multiplicações para tentar descobrir um número composto dado por outro colega.	25 min.
Discussão das Soluções	Conhecer fatorações em números primos, realizadas por outros colegas.	Apresentar aos colegas de classe algumas experiências realizadas na Atividade Principal.	25 min.
Sistematização do Conceito	Apresentar aos alunos o Teorema Fundamental da Aritmética	Resgatar experiências e conceitos prévios e apresentar o fato que a decomposição em números primos é única.	22 min.
Encerramento	Sintetizar as conclusões estabelecidas	Destacar alguns exemplos e introduzir técnica de decomposição.	3 min.
Raio X	Identificar decomposições em fatores primos e as diferenças entre decomposições contendo fatores compostos.	Efetuar decomposições diversas, sendo uma delas contendo somente números primos.	10 min.

nova escola

Slide 2 **Objetivo**

Tempo sugerido: 2 minutos.
Orientações: Leia o objetivo com a turma, seja projetando via projetor multimídia e/ou imprimindo o objetivo para ser colado no caderno de cada aluno.
Propósito: Compartilhar com a turma o objetivo a ser atingido nesta aula.

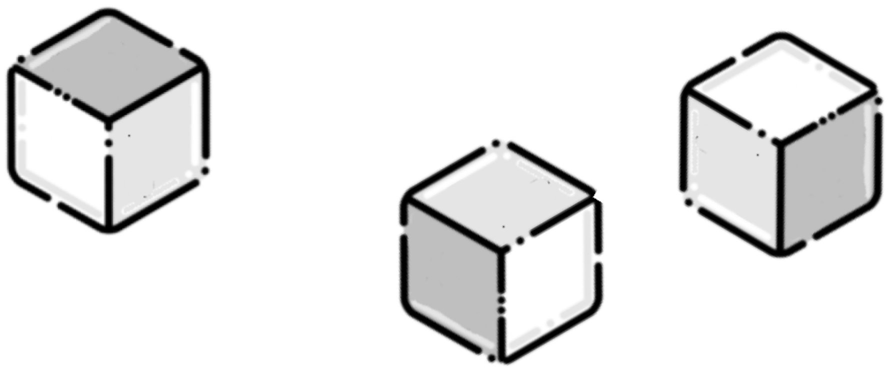
Objetivo: Identificar que todo número possui decomposição única em fatores primos.

nova escola

Slide 3 **ATIVIDADE DE AQUECIMENTO**

TEMPO SUGERIDO: 13 minutos
ORIENTAÇÕES:
Não foi proposto nessa atividade que os dados sejam construídos. Entretanto, seria bem interessante ter dados com números primos para utilização como recurso em outras atividades. Pode-se, de repente, construir dados com configurações diferentes de números primos de forma a ter maior abrangência. Pode-se simplesmente utilizar dados comuns e usar adesivos para inserir números primos às suas faces ou ainda pode-se utilizar a planificação do cubo e a aula pode ganhar em interdisciplinaridade. Com os dados prontos, as possibilidades serão muitas. Explore-as à vontade. Entretanto, essa atividade tem como objetivo tão somente explorar inicialmente os produtos entre números primos e os números compostos que surgem a partir daí. Caso alguém termine muito cedo em relação aos demais colegas de turma, proponha outros números (18, 80, 90....) ou proponha outros desafios, por exemplo: Qual o maior número possível a ser formado com esses dados? Qual o maior número par? E se o “dado” fosse um octaedro (sólido com 8 faces)?
PROPÓSITO: Apresentar aos alunos a atividade de aquecimento da aula.
DISCUTA COM A TURMA:
Se fossem os dados comuns (com numeração de 1 a 6), daria para se escrever os números da atividade? Como?
Se tivéssemos mais dados seria possível escrever os números da atividade?
E se esse dado pudesse ter mais faces? Vocês sabem o que é um octaedro? O que mudaria se tivéssemos um “dado” com 8 faces?
MATERIAIS COMPLEMENTARES
[Atividade de Aquecimento](#)
[Resolução da Atividade de Aquecimento](#)

Um dado é uma figura em formato de cubo. Tem, portanto, 6 faces que em geral são numeradas de 1 a 6. Larissa tem 3 dados numerados de forma diferente: suas seis faces contém os 6 primeiros números primos. Larissa desafiou os colegas a posicionar os dados de modo que, através das multiplicações das faces que ficarem voltadas para cima, possam obter o número 130. Quais serão os números nas 6 faces destes cubos? É possível obter o número 130 da forma determinada por Larissa? Se sim, que números deveriam aparecer nas faces superiores dos dados para vencer o desafio? E se Larissa tivesse escolhido o número 100?



Slide 4 **ATIVIDADE PRINCIPAL**

TEMPO SUGERIDO: 25 minutos
ORIENTAÇÕES:
Distribua os alunos em duplas de forma que cada aluno fique de frente para seu colega de dupla e leia com eles as regras.
Essa atividade conta com um tabuleiro e um arquivo contendo fichas para que o aluno possa anotar o número que ele escolheu. O fato de usar fichas para os alunos anotarem o número escolhido antes das perguntas, tem como objetivo confirmar erros e acertos ao final da sequência de perguntas. Caso não queira imprimir as fichas, eles podem utilizar o próprio caderno.
Não foi limitado na atividade a quantidade de perguntas que cada aluno pode fazer ao seu colega de dupla, nem a quantidade de palpites que cada um pode dar. Sugere-se ao aluno que esteja perguntando o limite de que faça a afirmação a respeito do número no máximo duas vezes.Em média após 5 perguntas já será possível deduzir qual número foi o escolhido.
Foi sugerido um tempo de 25 minutos para a realização desta atividade, portanto, é possível efetuá-la com sucesso mesmo que os alunos façam muitas perguntas.
O ideal é que as perguntas a serem feitas pelos alunos sejam do tipo: "múltiplo de", "divisível por", "divisor de", "número primo". Podem ocorrer perguntas do tipo "maior que" ou "menor que". Não há qualquer impedimento com relação a perguntas desse tipo. O que deve se evitar, são as perguntas diretas do tipo: "é 25?", "é 36?".
Oriente-os a quando terem ideia do número escolhido, que façam uma afirmação do tipo "o número é 25".
PROPÓSITO: Apresentar aos alunos a atividade principal da aula.
DISCUTA COM A TURMA:
Se tivesse um tabuleiro com números maiores, seria mais difícil?
Que tipo de pergunta vocês acreditam que ajuda o desempenho no jogo?
Vocês conseguem jogar este jogo sem olhar para o tabuleiro?
MATERIAIS COMPLEMENTARES
Atividade Principal
Resolução da Atividade Principal
Guia de Intervenção

Vamos organizar um jogo em dupla?

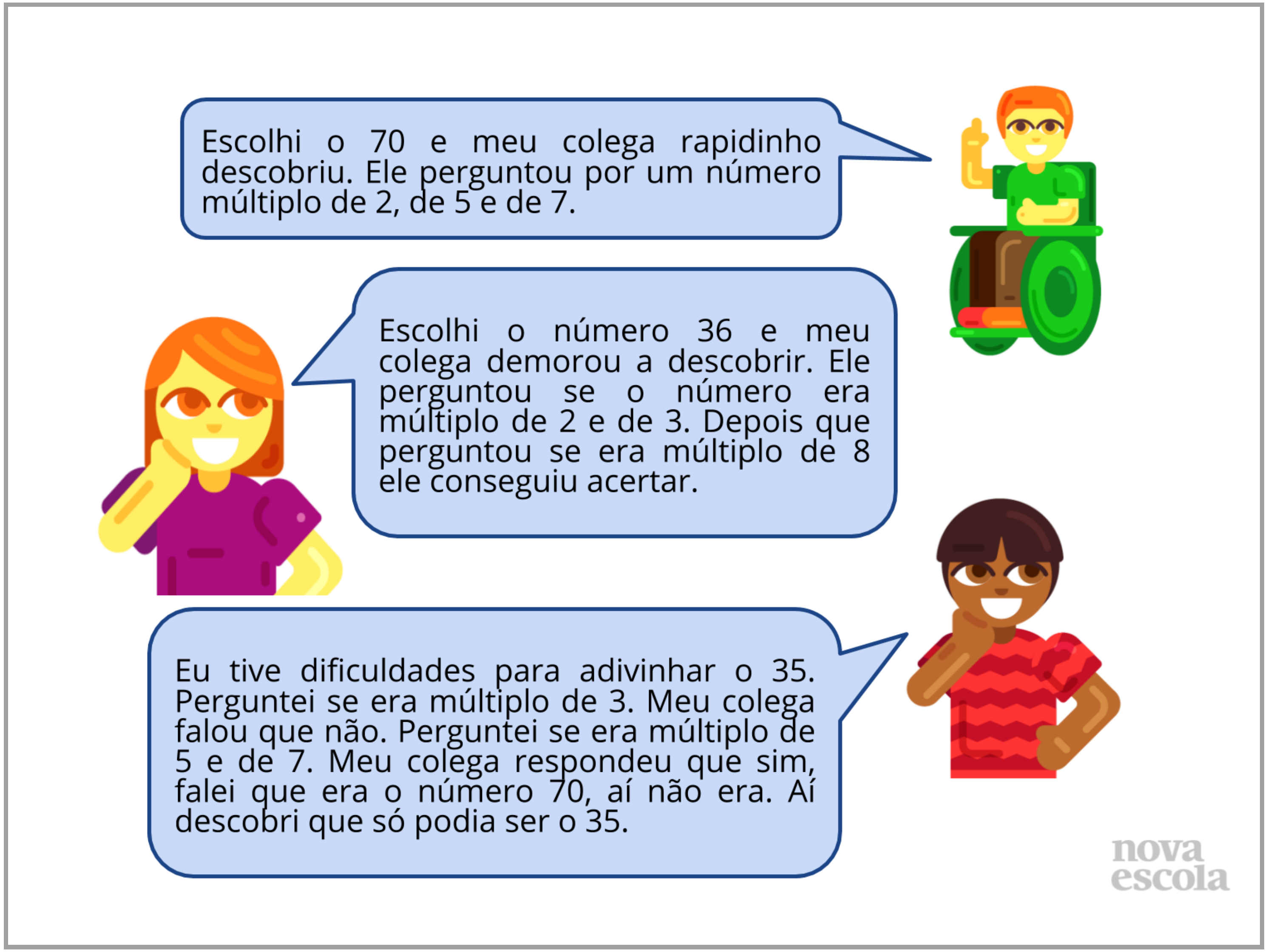
- No tabuleiro disponibilizado há números de 1 a 105. Você deverá escolher um número desta lista. Escreva-o em uma ficha retangular também disponibilizada de forma que seu colega não veja;
- Em seguida, o seu colega ficará com a tabela numérica virada para ele e ele deverá fazer perguntas para você, de forma que as únicas respostas possíveis sejam SIM ou NÃO. (Exemplos: "esse número é múltiplo de 2?", "esse número é múltiplo de 7?", "é um número primo?")
- À medida em que você for respondendo, seu colega usará os grãos que trouxeram para ir marcando os números que não atendem às respostas dadas;
- O jogo continua até que o seu colega tenta dizer qual o número que você escolheu (e que você escreveu na ficha antes das perguntas começarem a ser feitas).
- Depois de conferir a resposta e verificar se houve erro ou acerto, vocês invertem a posição e será a sua vez de tentar adivinhar o número que o seu colega escolheu.
- Pelo menos em uma rodada de cada um, anote as perguntas feitas e o número adivinhado.

Identificando decomposições em fatores primos

Material Complementar Fichas para Atividade
Principal
Material Complementar Tabuleiro Atividade
Principal

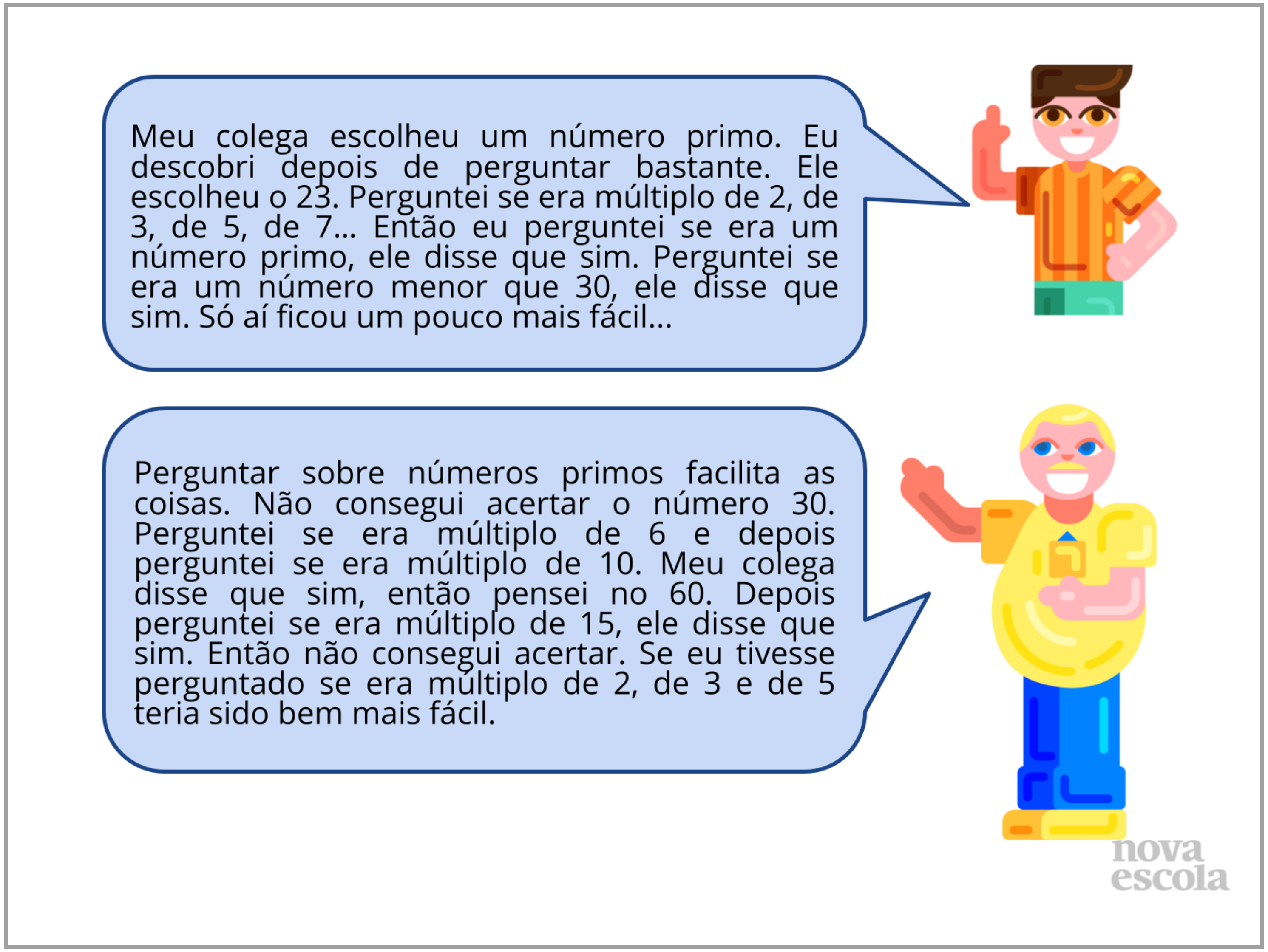
Slide 5 **PAINEL DE SOLUÇÕES (slides 5 e 6)**

TEMPO SUGERIDO: 25 minutos
ORIENTAÇÕES:
Peça a alguns alunos para que compartilhem sua experiência, como nos casos exemplificados no slide.
Sugere-se que o professor anote no quadro todas as decomposições que os alunos forem apresentando. Dessa forma, pode-se identificar possíveis erros e dificuldades nas decomposições, favorecendo uma correção efetiva.
À medida em que as decomposições forem sendo relatadas pelos alunos, atente-se para aquelas em que há números compostos. Quando isso ocorrer (e se ocorrer), questione-os a respeito da possibilidade deste número composto ser múltiplo de algum outro número.
PROPÓSITO: Discutir as soluções apresentadas pelos alunos.
DISCUTA COM A TURMA:
Imagine dois números de forma que um é múltiplo do outro, o que muda na decomposição?
É possível que haja decomposições em fatores primos diferentes para um mesmo número?
Como fica a decomposição em fatores primos de um número primo?



Slide 6 **PAINEL DE SOLUÇÕES (slides 5 e 6)**

TEMPO SUGERIDO: 25 minutos
ORIENTAÇÕES:
Peça a alguns alunos para que compartilhem sua experiência, como nos casos exemplificados no slide.
Sugere-se que o professor anote no quadro todas as decomposições que os alunos forem apresentando. Dessa forma, pode-se identificar possíveis erros e dificuldades nas decomposições, favorecendo uma correção efetiva.
À medida em que as decomposições forem sendo relatadas pelos alunos, atente-se para aquelas em que há números compostos. Quando isso ocorrer (e se ocorrer), questione-os a respeito da possibilidade deste número composto ser múltiplo de algum outro número.
PROPÓSITO: Discutir as soluções apresentadas pelos alunos.
DISCUTA COM A TURMA:
Imagine dois números de forma que um é múltiplo do outro, o que muda na decomposição?
É possível que haja decomposições em fatores primos diferentes para um mesmo número?
Como fica a decomposição em fatores primos de um número primo?



Slide 7 **SISTEMATIZAÇÃO DE CONCEITO**

TEMPO SUGERIDO: 15 minutos
ORIENTAÇÕES:
É importante lembrá-los da origem dos números primos. Caso necessário e seja possível acesse o plano de aula MAT6_03NUM01 e apresente o slide 10 (Encerramento) onde é apresentada a razão pela qual os números primos se chamam "primos". Novamente há menção a alguma aula anterior, quando lê-se que "foram utilizadas fichas para escrever multiplicações que resultaram em um número composto". Nesse caso, a aula em questão é a MAT6_03NUM03. Se tiver utilizado esta aula e as atividades realizadas estiverem nos cadernos dos alunos, basta recorrer a elas. Caso não tenha utilizado essa aula, será necessário que alguma atividade nesse sentido seja revista.
A expressão Teorema Fundamental da Aritmética pode soar estranha, afinal, "Teorema" não é um termo cotidianamente utilizado. Explique o significado da expressão ou incentive-os a buscar o significado da mesma em dicionários ou na internet caso a escola permita.
Na atividade de aquecimento, existe a possibilidade de os dados ficarem com todas as faces superiores iguais. Nesse caso haverá uma repetição de fatores primos. Explique-os que existe a possibilidade de utilizar a notação em forma de potência. Nesse caso, explique utilizando a expressão "notação de potência" ou "em forma de potência", afinal, a potenciação como operação matemática será vista mais adiante. Basta, nesse caso, explicar o que é base e expoente. Que o expoente indica a quantidade de fatores iguais à base que deverão ser multiplicados.
Efetue algumas decomposições com números que podem ser escolhidos pelos alunos. Sempre utilize a participação dos mesmos. Exemplo: "vamos efetuar a decomposição em fatores primos do 60, vocês podem me dizer uma multiplicação que resulte em 60?" Possivelmente eles dirão que 60=6x10. Em seguida pergunte: "esses fatores são primos?", "Que multiplicação resulta em 6?" e "que multiplicação resulta em 10?" Provavelmente a decomposição 60=2x3x2x5 estará escrita. Questione-os sobre se os fatores são todos primos? Em seguida, já que há fatores repetidos, utilize a notação de potência: 60=22.3.5. Caso algum aluno, após a primeira pergunta, apresente outra

Quando estudamos os números primos, vimos que eles se chamavam "primeiros" em outra língua, porque através da multiplicação dos números primos podemos obter todos os números compostos.

Em outras aulas, usamos fichas para escrever multiplicações que resultaram em um número composto. Mesmo quando usávamos fichas contendo números compostos, observamos que era possível escrever esses fatores como produto de números primos.

O fato que vocês observaram hoje, é muito importante em Matemática. Todos os números inteiros admitem uma decomposição em fatores primos, e essa decomposição é única. Esse fato chama-se **Teorema Fundamental da Aritmética**.

Você pode encontrar a decomposição em fatores primos de um número, por exemplo, começando por encontrar fatores compostos. Em seguida, decomponha esses fatores em números primos. Observe:

$$40=4x10=(2x2)x(2x5)= 2x2x2 \text{ x } 5 = \mathbf{2^3x5}$$

Quando ocorrer uma multiplicação onde um mesmo fator se repete várias vezes, pode-se utilizar a notação em forma de potência como usamos acima. Ou seja, 2x2x2 pode ser escrito como 2^3. O número 3 é chamado de expoente e indica a quantidade de fatores iguais que foram multiplicados.

nova escola

multiplicação que resulte em 60 (15x4 ou 12x5), utilize-a e repita o processo. Mostre-os que as decomposições em fatores primos serão idênticas ao final.

Mais abaixo, na seção “Discuta com a turma” há uma referência aos átomos em uma analogia com números primos. Lembre-se que este é um tema pertencente à disciplina de Ciências, entretanto, sugere-se que aguce a curiosidade dos mesmos. Explique superficialmente e informe que eles estudarão mais profundamente este assunto em Ciências, provavelmente no 9º ano, segundo a BNCC.

PROPÓSITO: Sistematizar o conceito central da aula.

DISCUTA COM A TURMA:

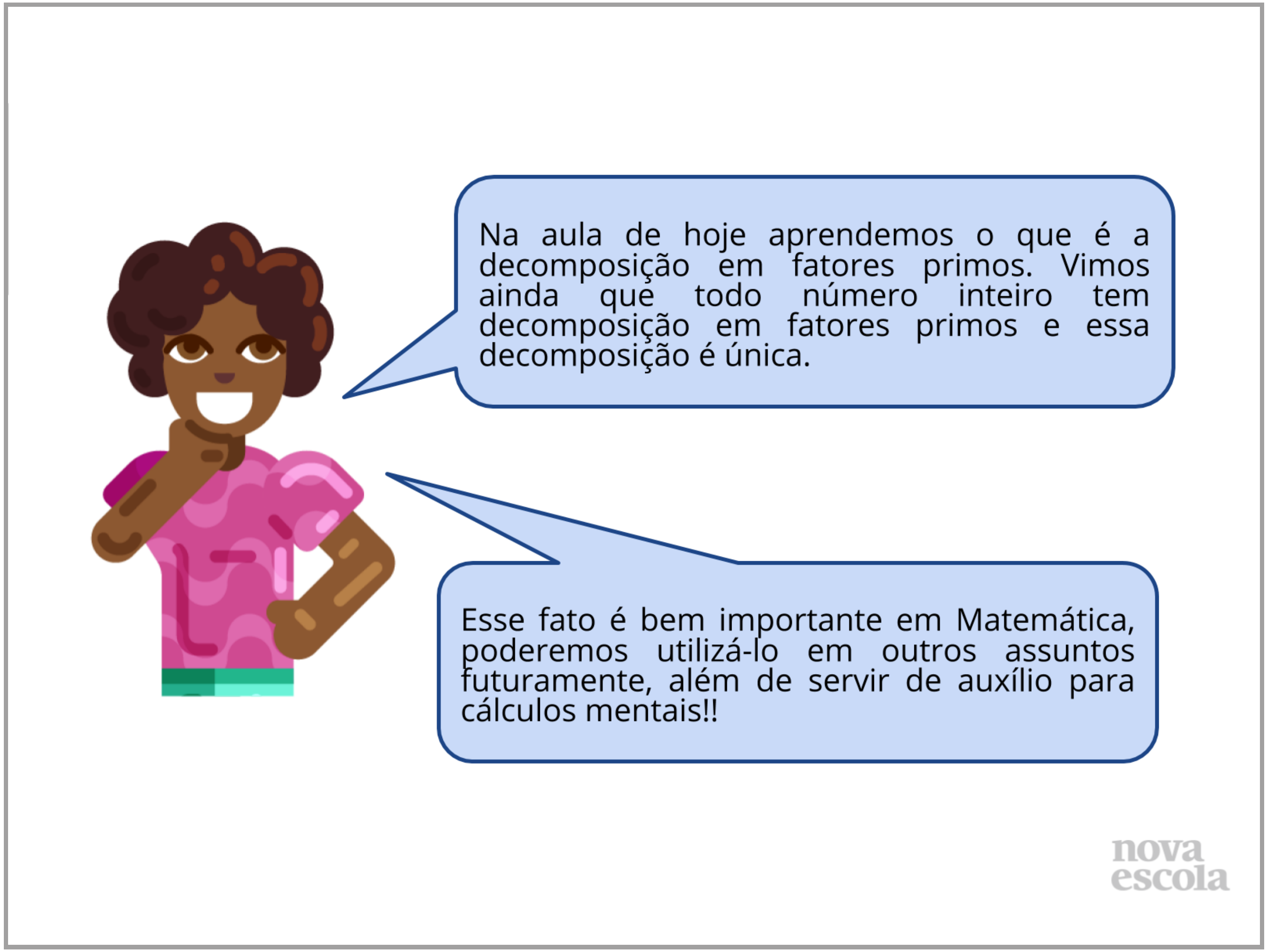
Você sabe do que as coisas são feitas? Se formos dividindo cada objeto à nossa volta várias vezes, qual será a constituição do resultado final? Você sabe o que são átomos? Vocês concordam com a expressão “os números primos são os átomos da Aritmética”?

Você é capaz de encontrar decomposições em fatores primos mentalmente?

MATERIAIS COMPLEMENTARES

Slide 8 **ENCERRAMENTO**

TEMPO SUGERIDO: 3 minutos
ORIENTAÇÕES:
Leia o slide para a turma, destaque a importância do Teorema Fundamental da Aritmética e avise que eles conhecerão mais aplicações do mesmo em outros assuntos.
PROPÓSITO: Sintetizar o conceito principal da aula.



Slide 9 **ATIVIDADE RAIO X**

TEMPO SUGERIDO: 10 minutos
ORIENTAÇÕES:
O tempo sugerido a essa atividade é de 10 minutos, o que permite um acompanhamento das possíveis dificuldades eventualmente apresentadas. Peça aos alunos para que a resolvam individualmente.
Observe que foi solicitado que o aluno escreva várias decomposições para cada número proposto, e uma dessas decomposições deve conter somente números primos. Isso fará com que ele exercite o método apresentado e perceba a unicidade da decomposição.
O item d) pede que o aluno decomponha o número 25, cuja decomposição única é 25=5x5=52. Caso haja tempo, instigue o aluno a procurar mais números com essa característica.
PROPÓSITO: Apresentar aos alunos uma atividade básica para aplicação da técnica.
DISCUTA COM A TURMA:
Houve muitas possibilidades de decomposição em fatores compostos?
MATERIAIS COMPLEMENTARES
Atividade Complementar
Atividade de Raio X
Resolução da Atividade Complementar
Resolução da Atividade do Raio X
Texto Complementar - Álgebra dos Inteiros X
Matemática do Contínuo
Material Complementar Fluxograma, Algorítimos, Matemática e Tecnologia

Para cada número abaixo, escreva, se possível, várias decomposições sendo uma delas contendo somente fatores primos. Utilize a notação com potências quando necessário:

a) 36;
b) 18;
c) 50;
d) 25;

nova escola

Guia de Intervenções
MAT6_03NUM07 /Identificando Decomposições em Fatores Primos

Possíveis dificuldades na realização da atividade	Intervenções
Na atividade principal, pode ocorrer de o aluno que deve fazer as perguntas não conseguir iniciar o jogo.	Questione-o sobre quais maneiras ele pode usar para se descobrir um número. Que tipo de pergunta pode ser feita? O que pode servir de informação para se descartar alguns números?
Ao final de cada resposta às perguntas realizadas na atividade principal, o aluno pode ter dificuldade em quais números marcar no tabuleiro.	Questione-o a respeito de que números ele quer excluir da análise, afinal, essa é a instrução nas regras da atividade. Peça-o para repetir a pergunta feita e qual a resposta. Que conclusão pode se extrair após essa pergunta e essa resposta? Que números se encaixam na resposta que seu colega deu? O 2 se encaixa? E o 10? E o 72?
Na atividade principal, pode ocorrer de um aluno ficar com 2, 3 ou 4 números e não conseguir fazer mais perguntas a fim de descobrir qual o número escolhido.	Instigue-o a buscar as diferenças entre estes números. Normalmente isso ocorre quando há números que tem os mesmos fatores em sua decomposição, mas em quantidades diferentes. Uma busca por decomposições diversas destes números pode ser o caminho para o aluno descobrir as diferenças entre eles e poder fazer perguntas mais diretas. Por exemplo: você viu que os dois números são múltiplos de 2, mas será que ambos são múltiplos de 4? E de 8?
Na sistematização do conceito, pode ocorrer de um aluno (por já ter estudado assim ou por influência de algum colega de outra turma) relatar que há outro método para se	Provavelmente o aluno se refere à técnica tradicional (que você pode rever clicando neste link). Sugere-se que você peça ao aluno para lhe explicar o teor da técnica. Caso ele

encontrar a decomposição em fatores primos de um número.	realmente a domine, peça que ele explique a toda a turma. **Aproveite o ensejo e mostre que independente da técnica, a decomposição em fatores primos é única**. Caso o aluno não se recorde totalmente da técnica, vale a pena explicar para toda a turma. Entretanto, como é um processo mecânico, há menos espaço para o cálculo mental.

Possíveis erros dos alunos	**Intervenções**
Na atividade principal pode ocorrer de ao final de todas as perguntas sobrar um número no tabuleiro que não corresponde ao número inicialmente escolhido.	Nesse caso, sugira à dupla para descobrir onde está o erro e apresentar para você em seguida. Várias são as possibilidades: marcação errada no tabuleiro, resposta "SIM" onde deveria ser "NÃO" e vice-versa. Em qualquer caso, o aprendizado envolvido na investigação de onde houve um equívoco, vale a pena. Utilize esse evento como momento de aprendizagem, ao invés de apontar o erro diretamente.

Resolução da Atividade Principal - MAT6_03NUM07

Atividade:

Vamos organizar um jogo em dupla?

- No tabuleiro disponibilizado há números de 1 a 105. Você deverá escolher um número desta lista. Escreva-o em uma ficha retangular também disponibilizada de forma que seu colega não veja;
- Em seguida, o seu colega ficará com a tabela numérica virada para ele e ele deverá fazer perguntas para você, de forma que as únicas respostas possíveis sejam SIM ou NÃO. (Exemplos: “esse número é múltiplo de 2?”, “esse número é múltiplo de 7?”, “é um número primo?”)
- À medida em que você for respondendo, seu colega usará os grãos de feijão que trouxeram para ir marcando os números que não atendem às respostas dadas;
- O jogo continua até que o seu colega tenta dizer qual o número que você escolheu (e que você escreveu na ficha antes das perguntas começarem a ser feitas).
- Depois de conferir a resposta e verificar se houve erro ou acerto, vocês invertem a posição e será a sua vez de tentar adivinhar o número que o seu colega escolheu.
- Pelo menos em uma rodada de cada um, anote as perguntas feitas.

Resolução (exemplo 1):

Jogador A: “O número é múltiplo de 3?”

Jogador B: “SIM”.

Marca-se, portanto os números que não são múltiplos de 3 para desconsiderá-los de forma que o tabuleiro ficará como segue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador A: “O número é múltiplo de 2?”

Jogador B: “SIM”.

Marca-se, portanto, nos números que restaram, aqueles que não são múltiplos de 2, já que eles não podem ser solução. O tabuleiro então fica como segue abaixo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador A: “o número é múltiplo de 5?”
Jogador B: “NÃO”

Marca-se portanto, no tabuleiro os números que são múltiplos de 5.

Jogador A: “o número é menor que 50?”
Jogador B: “SIM”

Marca-se, portanto, os números maiores que 50, a fim de desconsiderá-los.
O tabuleiro fica como segue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador A: “O número é múltiplo de 8?”
Jogador B: “SIM”.

Marca-se, portanto, os números que não são múltiplos de 8, a fim de excluí-los.
O tabuleiro, portanto, fica como segue:

Jogador A: “O número é múltiplo de 16?”
Jogador B: “SIM”

Marca-se, portanto, os números que não são múltiplos de 16. O tabuleiro portanto fica como segue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Observe que o único número não marcado é o 48. Que é, portanto, o número escolhido pelo jogador B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador A: “o número é 48”
Jogador B apresenta a ficha numerada antes das questões.

$\boxed{48}$

O jogador A anota um resumo das conclusões feitas após as perguntas:
48 é múltiplo de 2, é múltiplo de 3, não é múltiplo de 5, é menor que 50, é múltiplo de 8, é múltiplo de 16. Logo $48=16x3=2x2x2x2x3=2^4x3$

Resolução (exemplo 2):
Jogador B: “o número é múltiplo de 2?”
Jogador A: “NÃO”

Marca-se, portanto, os números que são múltiplos de 2 no tabuleiro, a fim de excluí-los da análise. O tabuleiro fica como segue abaixo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador B: “o número é múltiplo de 3?”
Jogador A: “NÃO”

Exclui-se, portanto, os números que são múltiplos de 3. O tabuleiro, portanto, fica como segue abaixo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador B: “o número é múltiplo de 5?”
Jogador A: “SIM”

Marca-se, portanto, no tabuleiro os números que não são múltiplos de 5, para que eles sejam excluídos das possibilidades.
O tabuleiro, portanto, fica como segue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador B: “O número é múltiplo de 7?”
Jogador A: “NÃO”
Marca-se os números que são múltiplos de 7, a fim de excluí-los das possibilidades. O tabuleiro portanto fica como segue abaixo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador B: “O número é múltiplo de 11?”
Jogador A: “SIM”
Marca-se os números que não são múltiplos de 11. O tabuleiro fica como segue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

O único número não marcado é o 55.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Jogador B: “o número é 55”

Jogador A apresenta a ficha com o número que foi escrito antes do início das perguntas.

$\boxed{55}$

Jogador A anota:

55 é múltiplo de 5 e múltiplo de 11. Portanto 55=5x11

Resolução da Atividade Complementar - MAT6_03NUM07

Atividades:

1. Escreva as decomposições em fatores primos dos números abaixo:

a) 15
b) 30
c) 36
d) 80
e) 120
f) 121

2. Escreva os cinco primeiros números primos. Quais números compostos podem ser obtidos multiplicando-se 3 desses 5 fatores de forma que cada fator apareça apenas uma vez na decomposição?

3. Elen escreveu as seguintes proposições no caderno. Você pode avaliar se as afirmações são verdadeiras ou falsas e explicar o motivo?

a) Todo número par tem o número 2 como fator em sua decomposição em fatores primos.
b) Todo número ímpar tem o número 3 como um de seus fatores.
c) Os números 9, 25, 36, 49 e 81 tem uma quantidade par de fatores primos em sua decomposição.
d) Se multiplicarmos três números inteiros iguais, o resultado é um número cuja quantidade de fatores primos em sua decomposição é um número múltiplo de 3.

Resoluções:

1.
   a) 15=3x5
   b) 30=2x3x5
   c) $36=2^2.3^2$
   d) $80=2^4.5$
   e) $120 = 2^3.3.5$
   f) $121 = 11^2$

2. Os cinco primeiros números primos são: 2, 3, 5, 7 e 11. Os números compostos que surgem quando são multiplicados 3 destes números são:

2x3x5= 30	2x7x11=154
2x3x7= 42	3x5x7=105
2x3x11= 66	3x5x11=165
2x5x7= 70	3x7x11= 231

2x5x11=110 5x7x11= 385

3.

a) VERDADEIRO, já que todo número par é múltiplo de 2;

b) FALSO, já que o número 25 é ímpar mas não tem o 3 em sua decomposição em fatores primos.

c) VERDADEIRO, $9 = 3^2$ (2 fatores); $25=5^2$ (2 fatores); $36=2^2x3^2$ (4 fatores); $49 = 7^2$ (2 fatores); $81=3^4$ (4 fatores).

d) VERDADEIRO, imagine um número inteiro qualquer *n* que tem decomposição em fatores primos $n=p_1xp_2x...xp_n$ *(não necessariamente todos distintos).* Ao multiplicarmos esse número por ele mesmo, teremos:
$nxnxn = n^3=(p_1xp_2x...xp_n)x(p_1xp_2x...xp_n)x(p_1xp_2x...xp_n)$
Observe que cada fator aparece 3 vezes nesta nova decomposição, portanto, o total de fatores deste novo número é *3n* que representa um múltiplo de 3.

Resolução do Raio X - MAT6_03NUM07

Atividade:
Para cada número abaixo, escreva, se possível, várias decomposições sendo uma delas contendo somente fatores primos. Utilize a notação com potências quando necessário:

a) 36;
b) 18;
c) 50;
d) 25;

Resolução:

a) $36 = 6x6=12x3=4x9=2x2x3x3=2^2.3^2$
b) $18=2x9=3x6=2x3x3=2x3^2$
c) $50=5x10=2x25=2x5x5=2x5^2$
d) $25=5x5=5^2$

nova
escola

Resolução da Atividade de Aquecimento - MAT6_03NUM07

Atividade:
Um dado é uma figura em formato de cubo. Tem, portanto, 6 faces que em geral são numeradas de 1 a 6. Larissa tem 3 dados numerados de forma diferente: suas seis faces contém os 6 primeiros números primos. Larissa desafiou os colegas a posicionar os dados de modo que, através das multiplicações das faces que ficarem voltadas para cima, possam obter o número 130. Quais serão os números nas faces destes cubos? É possível obter o número 130 da forma determinada por Larissa? Se sim, que números deveriam aparecer nas faces superiores dos dados para vencer o desafio? E se Larissa tivesse escolhido o número 100?

Resolução:
Os dados terão os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 em suas faces.

Para se obter o número 130 será necessário que as faces 2, 5 e 13 fiquem voltadas para cima, já que 130 = 2x5x13.

O número 100 escrito como produto destes números teria mais de três fatores, por isso, para se escrever o número 100 seria necessário mais dados. Como 100 = 2x2x5x5, bastaria mais um dado, pois poderíamos ter 2, 2, 5 e 5 como números primos presentes nas faces voltadas para cima nos cubos.

FLUXOGRAMAS, ALGORITMOS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Você pode me explicar como os gráficos de uma função qualquer são construídos em um aplicativo de celular (ou de um computador)? Você tem ideia de como são calculados logaritmos, raízes quadradas, raízes cúbicas, exponenciais, senos, cossenos e tangentes em um programa de computador? Você tem ideia de como são produzidos os aplicativos para celular? E se eu te disser que já há adolescentes criando aplicativos mundo afora? Já pensou se em algum país as crianças já soubessem criar programas?

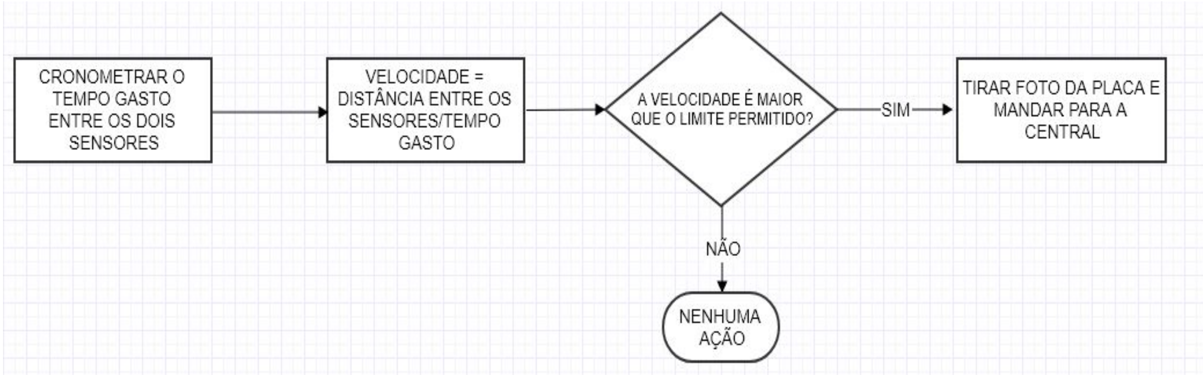
Em 2007, nos Estados Unidos, nascia o Scratch, plataforma que ensina programação a crianças a partir de 8 anos. A iniciativa do *MIT (Massachusets Institute of Technology)* tem como prerrogativa o fato de que a programação é uma outra forma de enxergar o mundo, ou seja, trata-se de uma linguagem, como o inglês, a matemática, ciências, o português, etc...

Uma pergunta que naturalmente pode surgir a partir desse fato é: podemos dizer que essas crianças, que mesmo tão jovens são capazes de programar um computador, são pequenos gênios? É de se notar que em março de 2018 a plataforma já conta com 30 milhões de projetos compartilhados. Seriam milhões de gênios? Um exercício simples de imaginação pode nos levar a prever as consequências educacionais, sociais e tecnológicas ao se ter tantas mentes aptas a enxergar o mundo através de mais este viés, segundo mais essa linguagem.

Após o advento do computador e com o constante aperfeiçoamento das técnicas computacionais, ficou em maior evidência a Matemática Discreta, que trata basicamente de tudo o que pode ser traduzido para linguagem computacional, ou mais precisamente, tudo o que pode ser traduzido em algoritmos para o computador. A palavra algoritmo é atribuída a *sequência finita de instruções a serem seguidas e que atingem um objetivo após um número finito de passos*. Sendo assim, para você ler este texto você realizou uma sequência de passos, um algoritmo. Para você ir trabalhar diariamente, você realiza uma sequência de passos. Algoritmos estão presentes o tempo todo em nossas atividades, basta observar nossa rotina.

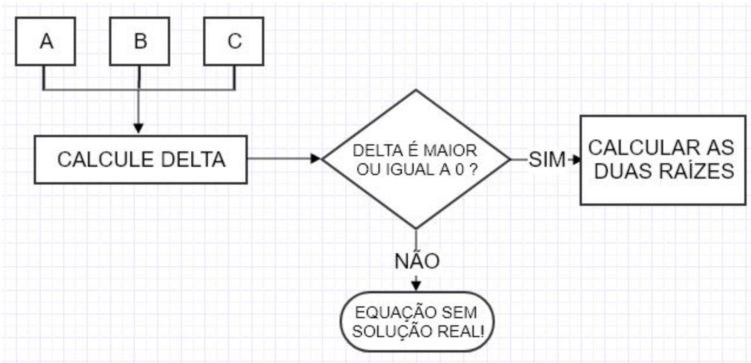
Para a surpresa de muitos, os computadores executam passos muito bem determinados, e, portanto, não ambíguos. Se a instrução não for clara, nenhum programa funciona. O computador executa EXATAMENTE as instruções dadas por seu programador. Quando você utiliza algum *software* que realiza coisas incríveis, lembre-se que o mérito na verdade está em quem deu estas instruções ao dispositivo (computador, celular, tablet, etc...).

Vamos pensar em um exemplo bem simples: como funcionam os radares que identificam a velocidade de um automóvel em um determinado trecho da estrada? Inicialmente pensemos no que queremos que seja realizado pelo nosso “software”. Imaginemos um software que calcule a velocidade do carro e caso esta velocidade seja maior do que o limite permitido, que ele me diga de alguma forma qual veículo cometeu esta infração. Observe o Fluxograma abaixo:



De forma bem simplificada, este fluxograma apresenta o algoritmo a ser executado pelo sistema que vai definir aplicar a multa ou não, de forma totalmente automática. Preste atenção ao fato de que as instruções tem que estar muito bem definidas. O dado que entra no sistema é o tempo gasto entre dois sensores. Já que é conhecida a distância percorrida pelo automóvel entre os dois sensores, então fica fácil determinar a velocidade com a qual o automóvel passou pelos sensores.

Imagine agora fluxogramas (e algoritmos) que identificam máximos divisores comuns, mínimos múltiplos comuns, raízes de equações, áreas de quadrados, volumes de sólidos, calculam médias, medianas, desvio padrão, etc… Segue abaixo um fluxograma que serve de base para um algoritmo que resolve equações de 2° grau ($ax^2+bx+c=0$) utilizando a fórmula de Bháskara (A, B e C representam os coeficientes da equação padrão).



Consegue perceber que toda e qualquer atividade repetitiva pode ser executada por um algoritmo computacional? Mais uma pergunta que pode ficar no ar: e a maneira pela qual ensinamos Matemática está levando isso em conta?

Um aspecto muito importante a ser discutido diz respeito ao fato de que, por serem passos discretos, o computador tem dificuldades em lidar com problemas do que comumente chamamos de *contínuo*. Já que os números reais contém os números racionais (que são frações de números inteiros) e os irracionais (que não podem ser representados por frações) como podemos utilizar números irracionais (o Pi (), por exemplo) na resolução de certos problemas? Como podemos dizer para o computador que ele deve utilizar a raiz quadrada de dois em um problema? Será que ele vai ser

capaz de medir uma diagonal de um quadrado, pegar o resultado e utilizar no problema?
Quando estudamos Séries na graduação, normalmente são estudadas as representações de certas funções (*f(x))* em Séries (normalmente de Taylor e de MacLaurin). Estas séries são somas infinitas que convergem para *f(a)* quando fizermos *x*=*a*. Observe:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ou seja, para se calcular a exponencial de 5, por exemplo, basta substituir o *x* por 5 na igualdade acima. Do lado direito da igualdade aparecerá uma soma infinita cujo resultado final será de fato, e^5 . A questão é que não é humanamente ou computacionalmente possível, se calcular essa soma dos infinitos termos. A solução portanto, é pegar um pedaço da soma infinita, que por ter caráter polinomial é facilmente calculável pelo computador. O caminho é definir quantos termos da soma serão adicionados para se ter o valor tão próximo quanto se queira do resultado real. Dessa mesma forma são calculados senos, cossenos, logaritmos naturais, etc...

Surpreso? Tente imaginar como um computador pode desenhar uma reta, já que uma reta está em correspondência com o conjunto dos números reais e, portanto, trata de um objeto contínuo. Da mesma forma, os gráficos de função contínua passam pelo mesmo dilema. Se o computador executa passos discretos, como ele é capaz de traçar objetos contínuos?

O princípio é exatamente o mesmo usado nas funções transcendentais. Já que o olho humano não detecta certos "buracos" nos gráficos, o computador determina uma discretização que permita uma visualização que nos pareça contínua.

Agora imagine uma aplicação em Engenharia, por exemplo, uma simulação de tensões em uma peça mecânica. A peça em si pertence a um outro contínuo, chamado *contínuo físico*. Normalmente os engenheiros utilizam ferramentas computacionais baseadas em *Elementos Finitos (às vezes são utilizados Volumes Finitos e em outras Elementos de Contorno)*, que nada mais são do que pontos discretos que, em conjunto, representam o que acontece no todo (contínuo). São expressões muito comuns nesse meio: *discretização, malha, interpolação e elemento de controle.*

Toda a teoria é produzida para que quanto mais pontos na discretização, mais próximo do resultado efetivo se chegue. Se lembra da noção intuitiva de Integral? O cálculo de áreas de figuras planas é o que motiva a definição de integral de uma função sobre um intervalo na reta real. O procedimento intuitivo consiste em simplesmente discretizar o domínio transformando-o em um conjunto de segmentos de reta que geram retângulos cuja somatória das áreas representa a área efetiva. Analogamente (e esperadamente) quanto maior a quantidade de retângulos utilizados na discretização do domínio, mais próximo se chega da área efetiva entre o gráfico de *f(x)* e um intervalo da reta.

Essa tônica vai se repetir em praticamente todas as aplicações envolvendo o contínuo. No que se refere a problemas contendo dados discretos, as possibilidades são ainda maiores. Imagine uma cidade contendo *n* pontos de coleta de lixo e você dispõe de um caminhão para fazer a coleta. Por razões econômicas você adoraria que esse caminhão fizesse um trajeto ótimo, ou seja, o trajeto que mais economize tempo e combustível. Essa é uma versão de um problema conhecido como *Problema do Caixeiro Viajante* e sua solução envolve um tempo computacional que cresce exponencialmente cada vez que se aumenta *n*.

De fato, as possibilidades de geração de solução algorítmica para problemas de Matemática Discreta são crescentes. Há algoritmos baseados no comportamento de colônias de formigas, algoritmos baseados em feromônios, algoritmos baseados em física quântica, outros baseados em problemas de presa-predador, algoritmos genéticos, etc… Aqui é um dos muitos momentos em que criatividade e Matemática trabalham juntas. Sinta-se motivado a pesquisar a respeito e incentivar seus alunos a pensarem em linguagem computacional.

Se considerarmos a crescente demanda por automação na indústria, a crescente importância da internet das coisas e a inteligência artificial aparecendo em vários dispositivos, não é difícil perceber a importância de se ensinar a linguagem computacional para crianças. O cidadão de um futuro muito próximo irá lidar diariamente com estas novas tecnologias e torna-se muito importante fazer com que se apropriem deste modo de ver o mundo. As sintaxes das linguagens de programação são secundárias, mas fluxogramas, descrição de etapas e raciocínio já podem ser ensinadas pois isto faz com que as crianças descubram novas formas de resolver problemas e se motivem a usar a criatividade. Quem disse que criatividade e Matemática não podem ser ensinadas simultaneamente?

Sugestões de sites para aprofundamento

https://scratch.mit.edu/ - Site do projeto Scratch do MIT, pioneiro no ensino de Programação para crianças.

http://programae.org.br/ - Programaê - Iniciativa da Fundação Lehman para disseminar o ensino de programação para crianças. Permite cadastro para interessados em ensinar programação.

https://novaescola.org.br/conteudo/7111/atividades-desplugadas-ensinar-linguagem-de-programacao-sem-computador - Associação Nova Escola - Atividades desplugadas – Linguagem de Programação sem Computador - Nesse artigo são apresentadas atividades que podem servir de introdução à linguagem de programação sem utilizar necessariamente o computador para tal.

https://www.codecademy.com/pt-BR - Codeacademy - Projeto de ensino de programação gratuito, voltado para adultos e profissionais de programação.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105

Álgebra dos Inteiros x Matemática do Contínuo

Pare por um instante e observe tudo à sua volta. Tente encontrar algo que não possa ter Matemática como ferramenta para interpretação, quantificação ou conceituação. Imagino que não tenha encontrado. Exatamente por ser essa Ciência tão ampla e devido a mudanças permanentes no mundo que nos rodeia, algumas áreas podem ter maior ou menor destaque em determinadas épocas. Nas últimas décadas, com a popularização do computador e outros dispositivos, uma área da Matemática vem ganhando destaque: a Matemática Discreta.

Na Matemática discreta são abordados tópicos passíveis de serem transformados em algoritmos computacionais. E o computador não trabalha de forma contínua (ou analógica). Ele trabalha seguindo passos discretos (um após o outro) e por isso, tem grande dificuldade em fornecer respostas para problemas do mundo contínuo sem uma devida aproximação (você acha que quando calculamos um seno no computador ele usa triângulos?).

Isso nos leva a discutir uma possível separação entre o mundo contínuo (analógico) e o mundo discreto (digital). Se observarmos algumas áreas da Matemática, essa cisão fica mais aparente. Observe como a Álgebra dos números inteiros (números primos, divisores comuns, múltiplos comuns, etc...) trata de temas que trazem uma certa característica discreta. Enquanto a Análise Matemática (funções, sequências e séries, etc...) tratam das relações entre contínuo e discreto e fundamenta o Cálculo Diferencial e Integral, que lida com conjuntos contínuos o tempo todo.

Para início de nossa discussão, observe a construção e algumas características dos principais conjuntos numéricos. Cabe ressaltar que estas construções não são as únicas formas de tratar do tema com rigor.

O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é definido rigorosamente através dos Axiomas de Peano (1858 - 1932). Este conjunto é comumente designado como o conjunto dos números utilizados para contar, já que são utilizados basicamente para representar quantidades de elementos. Nosso senso comum, por vezes, nos indica que $\mathbb{N}$ é um conjunto numérico que "começa com o zero e os números vão crescendo aumentando-se um por um". Esta noção é a que está por trás dos Axiomas de Peano. Eles nos dizem que $\mathbb{N}$ é um conjunto para o qual existe uma função (*s:* $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) chamada *sucessor*. Os axiomas de Peano afirmam que tal função é injetora, $0 \notin Im(s)$ e se existir um subconjunto $\mathbb{X}$ de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in \mathbb{X}$ e se para cada $k \in \mathbb{X}$ ocorrer que $s(k) \in \mathbb{X}$, então $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

Ou seja, $\mathbb{N}$ é um conjunto cujos elementos são: 0, *s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), ...* e assim por diante. Em relação ao que hoje temos ensinado no Ensino Fundamental é que *1=s(0), 2=s(s(0))...* e assim por diante. A partir desta definição, são definidas as operações aritméticas de adição e multiplicação e, com elas, a existência de neutros multiplicativos, aditivos, propriedades comutativas, relações de ordem, etc...

O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é construído formalmente utilizando-se classes de equivalência. Utilizaremos aqui o contexto algébrico segundo o qual, define-se uma estrutura algébrica e, então, identificamos que o conjunto dos números inteiros contém características que permitem classificá-lo como tal. É o caso dos Anéis. Anéis são estruturas algébricas onde são definidas as operações de adição e multiplicação e tais operações satisfazem algumas propriedades. Entre estas propriedades está a existência de um simétrico aditivo, ou seja, para todo elemento (*x)* existe um outro (*y)* que adicionado a *x* resulta em zero (neutro aditivo). Este elemento é normalmente escrito como *(-x)*. Segundo a construção rigorosa de $\mathbb{Z}$, a subtração inclusive não precisa necessariamente ser entendida como uma operação matemática propriamente dita em $\mathbb{Z}$, já que (*a-b)* pode ser entendida como a adição (*a + (-b))*. Entretanto, podemos também definir a subtração entre dois números inteiros, utilizando a adição pelo oposto.

Se imaginarmos os conjuntos numéricos como retas numéricas, podemos imaginar $\mathbb{Z}$ como um conjunto de pontos alinhados e cuja distância entre eles é de uma unidade. A forma pela qual a construção rigorosa dos números é realizada, garante que todas as operações definidas até então não geram resultados fora deste conjunto. Quando definimos elementos tais como múltiplos comuns, números primos e divisores comuns no Ensino Fundamental, apresentamos para os alunos a impossibilidade de divisão quando o resultado não é inteiro. Utilizamos a expressão “divisão exata” quando há uma divisão com resultado inteiro e onde não há resto. Entretanto, será que essa é a melhor expressão para designar estes casos?

Vamos fazer algumas considerações a respeito da questão apontada acima. Quando ensinamos a divisão nas séries iniciais utilizamos a expressão “divisão exata” quando queremos nos referir às divisões cujos restos sejam zero. Nesse momento da idade escolar, embora não citamos isso, mas estamos tratando da divisão entre números naturais. Em séries posteriores, utilizamos a expressão “divisibilidade” quando nos referimos a números que podem ser divididos de forma exata por outros (com resto zero) . Observe que a divisão não é fechada em $\mathbb{N}$, já que nos casos em que a divisão não é dita exata, o resultado numérico da mesma não é um número natural.

Quando tratamos de divisibilidade em $\mathbb{Z}$, utilizamos o algoritmo de Euclides, onde é possível se fazer a divisão entre quaisquer inteiros (desde que com divisor não nulo), afinal, a divisão Euclidiana prevê a existência de um inteiro chamado *quociente* e outro inteiro chamado *resto*. Em outras palavras, a divisão é utilizada em $\mathbb{Z}$ e se pensarmos somente no algoritmo de Euclides, divisões de toda forma podem ser feitas ali. Se esquecermos por um momento o Algoritmo de Euclides e imaginarmos a divisão gerando números com virgula (números decimais e dízimas periódicas), percebemos que por um lado a divisão está definida em $\mathbb{Z}$, mas por outro não é fechada em $\mathbb{Z}$, já que o resultado das divisões não é sempre um número inteiro.

Antes de tratarmos da fundamentação rigorosa do conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$), vamos compreender intuitivamente o significado da expressão *classes de equivalência*. Vamos observar um exemplo que vem da Geometria Analítica. De forma rigorosa, primeiro é definido o segmento orientado. Em seguida são definidos os segmentos orientados equipolentes (segmentos que possuem mesmo comprimento, direção e sentido). Dizemos em Geometria Analítica que a relação de equipolência é uma *Relação de Equivalência* no plano cartesiano. Em outras palavras, segmentos orientados equipolentes pertencem a uma mesma classe, chamada *Classe de equivalência*. O que chamamos de *vetor* em Geometria Analítica, nada mais é do que o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento dado, ou ainda, cada vetor é uma classe de equivalência, pois ele representa infinitos outros equipolentes a este.

Trataremos agora do conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$). Este conjunto é construído utilizando as classes de equivalência. De forma bem superficial, isso significa que cada fração $\frac{a}{b}$ é um representante de toda uma classe, a classe das frações que comumente chamamos de “frações equivalentes”. Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{Q}$ é o conjunto formado por todas essas classes de equivalência. Interessante perceber que sempre que são usadas classes de equivalência, a noção de elemento do conjunto se amplia, afinal um vetor no plano não é só um dado, mas sim um representante de vários segmentos orientados que são equipolentes a este. Analogamente, uma fração $\frac{a}{b}$ em $\mathbb{Q}$ representa todo um conjunto de frações equivalentes a $\frac{a}{b}$. A partir desta noção são definidas as operações e as relações de ordem. Em $\mathbb{Q}$ temos a importante propriedade de que todo número não nulo tem um inverso, que é um número racional que multiplicado pelo primeiro resulta em 1 (neutro multiplicativo). Esta noção permite, por exemplo, que se encare a divisão em $\mathbb{Q}$ (*a:b)* como uma multiplicação pelo inverso ($a \times b^{-1}$).

Quanto discutimos a divisão no conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$), ela ganha outros contornos. Neste conjunto a divisão entre números racionais pode ser definida como segue:

Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d} \neq \frac{0}{1}$, a divisão $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ pode ser definida pela fração $\frac{ad}{bc}$. Por este ponto de vista, toda divisão em $\mathbb{Q}$ está bem definida e está fechada neste conjunto. Se considerarmos os resultados da divisão como sendo novas frações, pode-se dizer que toda divisão aqui é uma divisão exata. Já quando lecionamos e tratamos dos números racionais, é comum utilizarmos a expressão “decimal exata” para caracterizar os números racionais cuja representação em fração contém potência de dez no seu denominador. Observe ainda que, como o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos Racionais, então a divisibilidade em $\mathbb{Z}$, pode ainda ser imaginada como uma divisão por frações de denominador 1.

Enfim, o que percebe-se é uma mudança no significado da divisão ao longo dos principais conjuntos numéricos e também uma mudança na forma como tratamos do assunto no Ensino Fundamental. É interessante observar estas sutilezas pois a fundamentação matemática de todo essa construção faz com que nenhum conceito fique contraditório com outros.

Se inserirmos agora estes números na reta numérica, ela parecerá bem mais cheia. Será que temos agora algo que podemos chamar de contínuo? Vamos fazer um exercício mental. Imagine a reta numérica composta somente por números inteiros. Agora imagine o conjunto dos números inteiros menores que 5. Esse conjunto tem maior elemento, correto? Imagine o mesmo exercício mas na reta numérica composta por números racionais. Qual é o maior número racional que não ultrapassa o 5?

Ao tentarmos (e não conseguirmos) responder questões como esta última, podemos nos perguntar a respeito do caráter discreto dos números racionais. Afinal, $\mathbb{Q}$ é um conjunto discreto? Outras perguntas importantes: $\mathbb{Q}$ é enumerável? Por quê raramente (ou nunca) este tipo de questionamento faz parte das aulas de Matemática?

Algumas questões podemos responder. Sobre $\mathbb{Q}$ ser ou não ser um conjunto discreto, imagine uma sequência de números racionais que estejam tão próximos de uma fração $\frac{a}{b}$ quanto se queira. Consegue imaginar? Sempre é possível responder positivamente a esta pergunta, portanto, $\mathbb{Q}$ não é um conjunto discreto. Outra maneira de entender esse conceito é observar se é possível se definir o sucessor. Nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ o sucessor está bem claro intuitivamente e bem definido do ponto de vista axiomático. Agora pense: qual o sucessor racional do número racional 1/2? Qual é o "próximo" número racional imediatamente após o ½? Outra pergunta interessante de se fazer em sala de aula: qual é o menor número racional maior que zero?

Diferentemente, no conjunto dos inteiros não é possível utilizar uma sequência de números inteiros que fique tão próxima quanto se queira de outro número inteiro. Por este argumento, concluímos que $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto. Mas $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, ou seja, existe uma função bijetora entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$. Em outras palavras, é possível "contar" os números racionais! O conjunto dos Números Racionais portanto, é dito enumerável mas não é um conjunto discreto.

Um pergunta relevante seria: a reta numérica composta por números racionais (consequentemente inteiros e naturais) é completa? Existem "buracos" na reta numérica composta por números racionais? A resposta a esta última pergunta é sim, afinal, temos os números irracionais que, enfim, "completam" a reta numérica, formando assim o conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$). Note que $\mathbb{R}$ é fechado quanto à adição, multiplicação, potenciação e às suas operações inversas, respectivamente, subtração, divisão e radiciação. Lembre-se que $\mathbb{N}$ só é fechado quanto à adição, multiplicação e potenciação. A análise real ($\mathbb{R}$) apresenta fatos interessantíssimos ("cortes de Dedekind, corpo ordenado completo, há mais irracionais do que racionais?"), mas por estarem além do escopo deste texto, apresentaremos sugestões de literatura para aprofundamento.

Agora, para finalizar, gostaria de fazer algumas perguntas: nossos alunos, ao final do Ensino Fundamental, conseguiriam perceber essas diferenças na divisibilidade sozinhos? Vale a pena questionar os alunos a respeito de conjuntos enumeráveis? Seria interessante discutir conjuntos discretos e contínuos com nossos alunos? Essas e outras questões devem ser feitas. Acredito que essas e outras questões não só podem como devem ser feitas. Buscar o conhecimento e fazer perguntas que valem a pena é importante não só para os estudantes, mas para todos nós, que estamos sempre aprendendo. Sempre que possível, estude mais, conforme-se menos, busque mais, compartilhe mais, duvide mais e se inspire. Inspiração é contagioso.

Sugestões de Leitura

FERREIRA, J., **A Construção dos Números**, Textos Universitários - SBM, Rio de Janeiro - 2010.
FIGUEIREDO, D. G.; **Análise I**, 2a Edição. Livros Técnicos e Centícos Editora, Rio de Janeiro, 1996.

HEFEZ, A.; **Curso de Álgebra**, vol. 1., Coleção MAtemática Universitária, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, 1993

ÁVILA, G. G.; **Análise Matemática para Licenciatura**. 1a Edição. Edgar Blucher, São Paulo, 2001.

BOFF, D.F., **A construção dos números reais na educação básica,** Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática - UFRGS, Porto Alegre, 2006. Disponível em https://goo.gl/DArxYA, Acessado em 21 de março de 2018.

MOSCIBROSKI, T.M.; **A amplitude do conjunto dos números irracionais,** Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática - UFSC, Florianópolis, 2002. Disponível em https://goo.gl/eeYV6S, Acessado em 21 de março de 2018.

Vamos organizar um jogo em dupla?

- No tabuleiro disponibilizado há números de 1 a 105. Você deverá escolher um número desta lista. Escreva-o em uma ficha retangular também disponibilizada de forma que seu colega não veja;
- Em seguida, o seu colega ficará com a tabela numérica virada para ele e ele deverá fazer perguntas para você, de forma que as únicas respostas possíveis sejam SIM ou NÃO. (Exemplos: "esse número é múltiplo de 2?", "esse número é múltiplo de 7?", "é um número primo?")
- À medida em que você for respondendo, seu colega usará os grãos de feijão que trouxeram para ir marcando os números que não atendem às respostas dadas;
- O jogo continua até que o seu colega tenta dizer qual o número que você escolheu (e que você escreveu na ficha antes das perguntas começarem a ser feitas).
- Depois de conferir a resposta e verificar se houve erro ou acerto, vocês invertem a posição e será a sua vez de tentar adivinhar o número que o seu colega escolheu.
- Pelo menos em uma rodada de cada um, anote as perguntas feitas.

Vamos organizar um jogo em dupla?

- No tabuleiro disponibilizado há números de 1 a 105. Você deverá escolher um número desta lista. Escreva-o em uma ficha retangular também disponibilizada de forma que seu colega não veja;
- Em seguida, o seu colega ficará com a tabela numérica virada para ele e ele deverá fazer perguntas para você, de forma que as únicas respostas possíveis sejam SIM ou NÃO. (Exemplos: "esse número é múltiplo de 2?", "esse número é múltiplo de 7?", "é um número primo?")
- À medida em que você for respondendo, seu colega usará os grãos de feijão que trouxeram para ir marcando os números que não atendem às respostas dadas;
- O jogo continua até que o seu colega tenta dizer qual o número que você escolheu (e que você escreveu na ficha antes das perguntas começarem a ser feitas).
- Depois de conferir a resposta e verificar se houve erro ou acerto, vocês invertem a posição e será a sua vez de tentar adivinhar o número que o seu colega escolheu.
- Pelo menos em uma rodada de cada um, anote as perguntas feitas.

---

1. Escreva as decomposições em fatores primos dos números abaixo:

a) 15
b) 30
c) 36
d) 80
e) 120
f) 121

2. Escreva os cinco primeiros números primos. Quais números compostos podem ser obtidos multiplicando-se 3 desses 5 fatores, e de forma que cada fator apareça apenas uma vez na decomposição?

3. Elen escreveu as seguintes proposições no caderno. Você pode avaliar se as afirmações são verdadeiras ou falsas e explicar o motivo?

a) Todo número par tem o número 2 como fator em sua decomposição em fatores primos.
b) Todo número ímpar tem o número 3 como um de seus fatores.
c) Os números 9, 25, 36, 49 e 81 tem uma quantidade par de fatores primos em sua decomposição.
d) Se multiplicarmos três números inteiros iguais, o resultado é um número cuja quantidade de fatores primos em sua decomposição é um número múltiplo de 3.

nova escola

Resolução do Raio X - MAT6_03NUM07

Atividade:
Para cada número abaixo, escreva, se possível, várias decomposições sendo uma delas contendo somente fatores primos. Utilize a notação com potências quando necessário:

a) 36;
b) 18;
c) 50;
d) 25;

Resolução:

a) $36 = 6x6=12x3=4x9=2x2x3x3=2^2.3^2$
b) $18=2x9=3x6=2x3x3=2x3^2$
c) $50=5x10=2x25=2x5x5=2x5^2$
d) $25=5x5=5^2$

Resolução da Atividade de Aquecimento - MAT6_03NUM07

Atividade:
Um dado é uma figura em formato de cubo. Tem, portanto, 6 faces que em geral são numeradas de 1 a 6. Larissa tem 3 dados numerados de forma diferente: suas seis faces contém os 6 primeiros números primos. Larissa desafiou os colegas a posicionar os dados de modo que, através das multiplicações das faces que ficarem voltadas para cima, possam obter o número 130. Quais serão os números nas faces destes cubos? É possível obter o número 130 da forma determinada por Larissa? Se sim, que números deveriam aparecer nas faces superiores dos dados para vencer o desafio? E se Larissa tivesse escolhido o número 100?

Resolução:
Os dados terão os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 em suas faces.

Para se obter o número 130 será necessário que as faces 2, 5 e 13 fiquem voltadas para cima, já que 130 = 2x5x13.

O número 100 escrito como produto destes números teria mais de três fatores, por isso, para se escrever o número 100 seria necessário mais dados. Como 100 = 2x2x5x5, bastaria mais um dado, pois poderíamos ter 2, 2, 5 e 5 como números primos presentes nas faces voltadas para cima nos cubos.