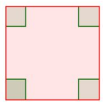
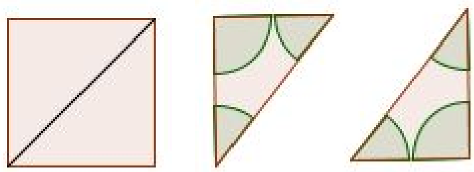
Resolução da atividade complementar - MAT7_20GEO04

1) Qual é a medida de cada ângulo interno do quadrado? É possível pavimentar o plano utilizando apenas quadrados? Justifique sua resposta utilizando argumentos matemáticos.



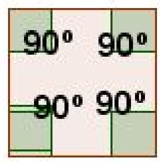
Provavelmente o aluno já sabe que a medida de cada ângulo interno do quadrado é 90º, mas incentive-o a registrar o cálculo para a obtenção do mesmo. Este cálculo pode ser feito de duas formas:

1ª) Dividindo-se o quadrado em dois triângulos por sua diagonal, depois calcular a soma das medidas dos ângulos internos do quadrado, multiplicando por 2 a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo (180º x 2 = 360º) e, finalmente, dividir esta soma por 4 (360º : 4 = 90º).



180º x 2 = 360º

360º : 4 = 90º



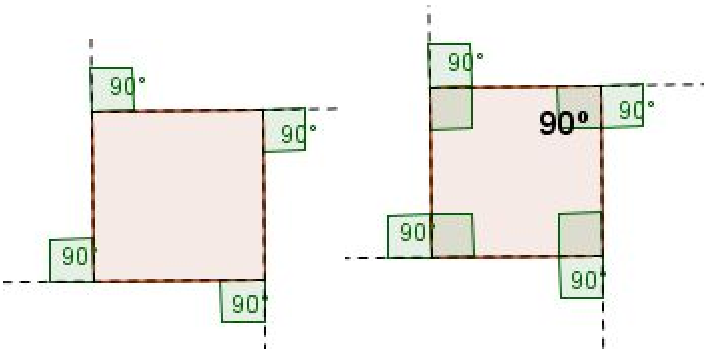
O aluno poderá optar pela fórmula que resume este procedimento. Para um polígono regular de n lados, a medida de cada ângulo interno será dada por

$$\frac{180\,(n-2)}{n}$$

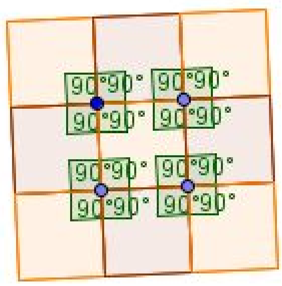
Para n = 4, temos

$$\frac{180\,(4-2)}{4} = \frac{180\,.\,2}{4} = \frac{360}{4} = 90.$$

2ª) Através da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer, que é sempre 360º, encontramos a medida de cada ângulo externo fazendo 360º : 4 = 90º, pois o quadrado possui 4 ângulos externos congruentes. Como cada ângulo interno é suplementar de um ângulo externo correspondente a ele, fazemos
180º - 90º = 90º.

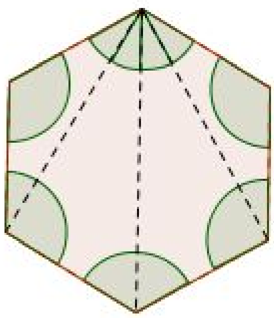


Agora que já sabemos que a medida de cada ângulo do quadrado é 90º, basta descobrir se existe um número inteiro de vezes 90º, que resulta em 360º, isto é 360º : 90º = 4. Então com 4 quadrados congruentes ao redor de um vértice em comum, fechamos o plano sem buracos e sem sobreposições. Portanto é possível pavimentar o plano com quadrados.



2) A professora de Maria pediu a seus alunos que observassem o piso do pátio de sua escola. Em seguida mostrou-lhes a imagem de uma colméia de abelhas. Depois perguntou-lhes: Qual a explicação matemática para o fato de os alvéolos da colméia se encaixarem perfeitamente, e os ladrilhos hexagonais do piso do pátio pavimentarem o plano?
Como você responderia a esta questão? Faça ilustrações da sua resposta.

Primeiro o aluno deverá calcular a medida de cada ângulo interno do hexágono regular. Isto poderá ser feito de várias maneiras. Uma delas é dividir o hexágono em quatro triângulos pelas diagonais que partem de um dos vértices.
Como a soma das medidas dos ângulos internos de cada triângulo é 180º, a soma das medidas dos ângulos internos do hexágono será 4 x 180º = 720º. O hexágono regular possui 6 ângulos internos congruentes, assim a medida de cada ângulo interno é 720º : 6 = 120º.



4 x 180º = 720º

720º : 6 = 120º

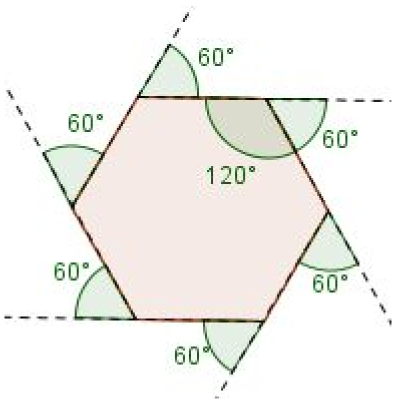
Ou utilizando a fórmula onde **n** é o número de lados do polígono regular:

$$\frac{180\,(n-2)}{n}$$

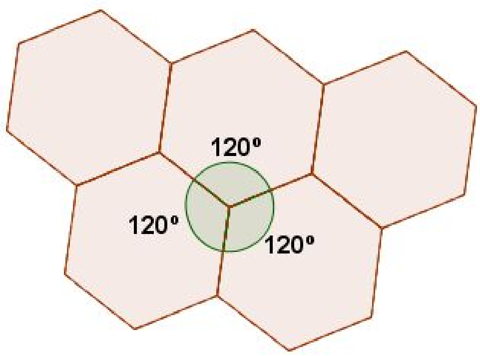
Para n = 6, temos

$$\frac{180\,(6-2)}{6} = \frac{180\,.\,4}{6} = \frac{720}{6} = 120º$$

Um outro modo seria utilizar o fato de que a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono é 360º, e que o hexágono regular possui 6 ângulos externos congruentes, e fazer 360º : 6 = 60º. Como o ângulo externo e o ângulo interno são suplementares, a medida do ângulo interno é 180º - 60º = 120º.



Agora basta verificar que 3 hexágonos regulares, unidos por um vértice em comum, apresenta 3 x 120º = 360º, isto é, uma volta completa ao redor de ponto, sem sobreposição e sem lacunas.



3) [Desafio] Encontre dois ou mais polígonos regulares diferentes, que juntos pavimentem o plano. Dê a justificativa matemática para este fato e ilustre sua resposta.

Para facilitar o trabalho, vamos preencher a tabela abaixo:

polígono regular	**medida de cada ângulo interno**
triângulo equilátero	$\frac{180}{3} = 60^{o}$
quadrado	$\frac{180\,(4-2)}{4} = \frac{180\,.\,2}{4} = \frac{360}{4} = 90^{o}$
pentágono regular	$\frac{180\,(5-2)}{5} = \frac{180\,.\,3}{5} = \frac{540}{5} = 108^{o}$
hexágono regular	$\frac{180\,(6-2)}{6} = \frac{180\,.\,4}{6} = \frac{720}{6} = 120^{o}$
heptágono regular	$\frac{180\,(7-2)}{7} = \frac{180\,.\,5}{7} = \frac{900}{7} \simeq 128{,}6^{o}$
octógono regular	$\frac{180\,(8-2)}{8} = \frac{180\,.\,6}{8} = \frac{1080}{8} = 135^{o}$

Agora poderemos analisar que combinações de ângulos internos poderão resultar em uma soma igual a 360º:

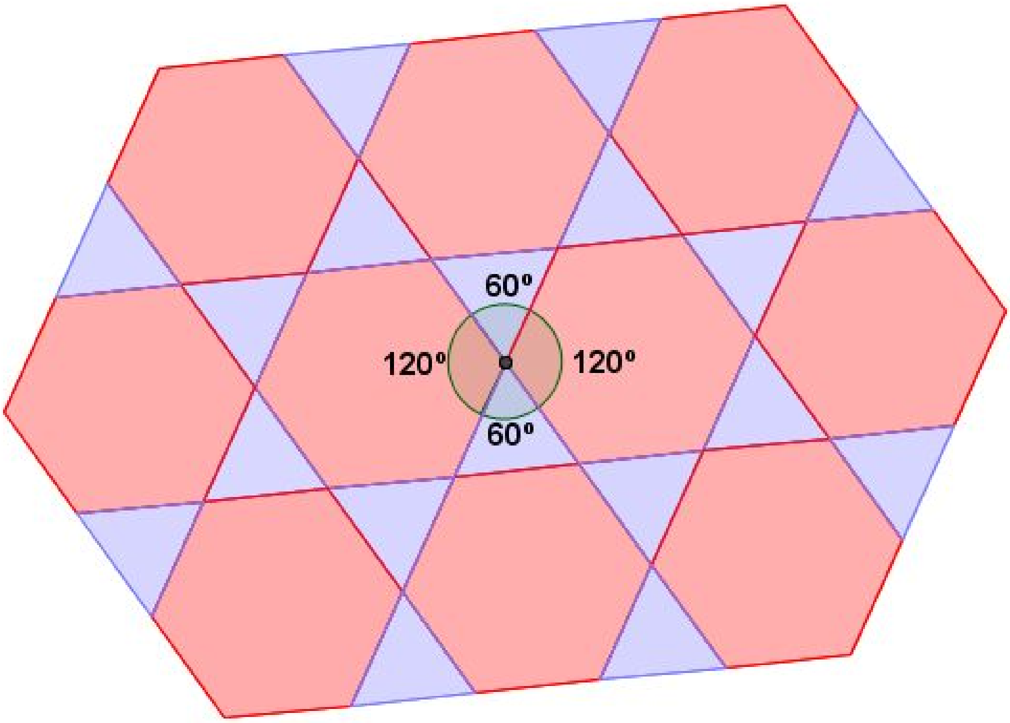
1ª) <u>2 triângulos equiláteros e 2 hexágonos regulares:</u>
60º x 2 + 120º x 2 = 120º + 240º = 360º

2ª) <u>4 triângulos equiláteros e 1 hexágono regular:</u>
60º x 4 + 120º x 1 = 240º + 120º = 360º

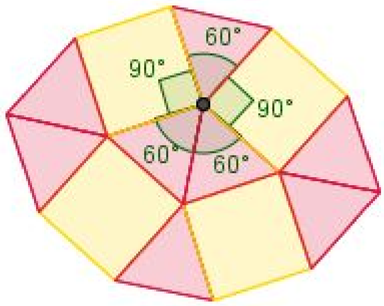
3ª) <u>3 triângulos equiláteros e 2 quadrados</u>:
60º x 3 + 90º x 2 = 180º + 180º = 360º

4ª) <u>1 quadrado e 2 octógonos regulares</u>:
90º + 135º x 2 = 90º + 270º = 360º

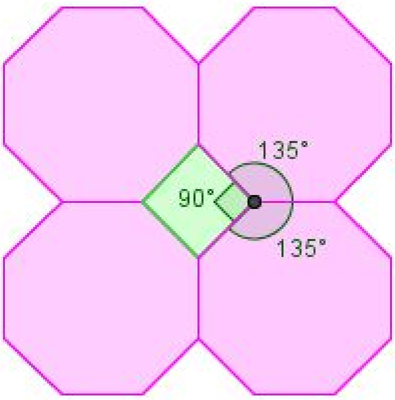
2 triângulos equiláteros e 2 hexágonos regulares



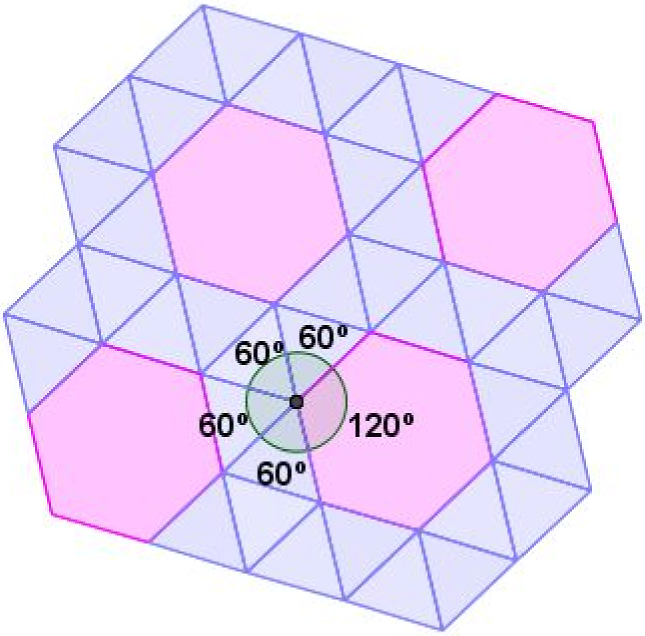
3 triângulos equiláteros e dois quadrados



2 octógonos regulares e um quadrado



4 triângulos equiláteros e 1 hexágono regular



4) Junte-se a outros três colegas. Utilizando os moldes que a professora entregou, confeccione outros polígonos regulares e, juntamente com seu grupo, faça um moisaico bem bonito com estes polígonos em folha de papel sulfite. Use a imaginação e capriche.

Aqui os alunos poderão usar sua criatividade construindo mosaicos combinando, ou não, polígonos diferentes e usando as cores livremente. Oriente-os a usar a simetria nas cores.
Aqui está mais um exemplo: