Álgebra dos Inteiros x Matemática do Contínuo

Pare por um instante e observe tudo à sua volta. Tente encontrar algo que não possa ter Matemática como ferramenta para interpretação, quantificação ou conceituação. Imagino que não tenha encontrado. Exatamente por ser essa Ciência tão ampla e devido a mudanças permanentes no mundo que nos rodeia, algumas áreas podem ter maior ou menor destaque em determinadas épocas. Nas últimas décadas, com a popularização do computador e outros dispositivos, uma área da Matemática vem ganhando destaque: a Matemática Discreta.

Na Matemática discreta são abordados tópicos passíveis de serem transformados em algoritmos computacionais. E o computador não trabalha de forma contínua (ou analógica). Ele trabalha seguindo passos discretos (um após o outro) e por isso, tem grande dificuldade em fornecer respostas para problemas do mundo contínuo sem uma devida aproximação (você acha que quando calculamos um seno no computador ele usa triângulos?).

Isso nos leva a discutir uma possível separação entre o mundo contínuo (analógico) e o mundo discreto (digital). Se observarmos algumas áreas da Matemática, essa cisão fica mais aparente. Observe como a Álgebra dos números inteiros (números primos, divisores comuns, múltiplos comuns, etc...) trata de temas que trazem uma certa característica discreta. Enquanto a Análise Matemática (funções, sequências e séries, etc...) tratam das relações entre contínuo e discreto e fundamenta o Cálculo Diferencial e Integral, que lida com conjuntos contínuos o tempo todo.

Para início de nossa discussão, observe a construção e algumas características dos principais conjuntos numéricos. Cabe ressaltar que estas construções não são as únicas formas de tratar do tema com rigor.

O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é definido rigorosamente através dos Axiomas de Peano (1858 - 1932). Este conjunto é comumente designado como o conjunto dos números utilizados para contar, já que são utilizados basicamente para representar quantidades de elementos. Nosso senso comum, por vezes, nos indica que $\mathbb{N}$ é um conjunto numérico que "começa com o zero e os números vão crescendo aumentando-se um por um". Esta noção é a que está por trás dos Axiomas de Peano. Eles nos dizem que $\mathbb{N}$ é um conjunto para o qual existe uma função ($s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) chamada *sucessor*. Os axiomas de Peano afirmam que tal função é injetora, $0 \notin Im(s)$ e se existir um subconjunto $\mathbb{X}$ de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in \mathbb{X}$ e se para cada $k \in \mathbb{X}$ ocorrer que $s(k) \in \mathbb{X}$, então $\mathbb{X} = \mathbb{N}$.

Ou seja, ℕ é um conjunto cujos elementos são: 0, *s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), ...* e assim por diante. Em relação ao que hoje temos ensinado no Ensino Fundamental é que *1=s(0), 2=s(s(0))...* e assim por diante. A partir desta definição, são definidas as operações aritméticas de adição e multiplicação e, com elas, a existência de neutros multiplicativos, aditivos, propriedades comutativas, relações de ordem, etc...

O conjunto dos números inteiros (ℤ) é construído formalmente utilizando-se classes de equivalência. Utilizaremos aqui o contexto algébrico segundo o qual, define-se uma estrutura algébrica e, então, identificamos que o conjunto dos números inteiros contém características que permitem classificá-lo como tal. É o caso dos Anéis. Anéis são estruturas algébricas onde são definidas as operações de adição e multiplicação e tais operações satisfazem algumas propriedades. Entre estas propriedades está a existência de um simétrico aditivo, ou seja, para todo elemento (*x)* existe um outro (*y)* que adicionado a *x* resulta em zero (neutro aditivo). Este elemento é normalmente escrito como *(-x)*. Segundo a construção rigorosa de ℤ, a subtração inclusive não precisa necessariamente ser entendida como uma operação matemática propriamente dita em ℤ, já que (*a-b)* pode ser entendida como a adição (*a + (-b))*. Entretanto, podemos também definir a subtração entre dois números inteiros, utilizando a adição pelo oposto.

Se imaginarmos os conjuntos numéricos como retas numéricas, podemos imaginar ℤ como um conjunto de pontos alinhados e cuja distância entre eles é de uma unidade. A forma pela qual a construção rigorosa dos números é realizada, garante que todas as operações definidas até então não geram resultados fora deste conjunto. Quando definimos elementos tais como múltiplos comuns, números primos e divisores comuns no Ensino Fundamental, apresentamos para os alunos a impossibilidade de divisão quando o resultado não é inteiro. Utilizamos a expressão “divisão exata” quando há uma divisão com resultado inteiro e onde não há resto. Entretanto, será que essa é a melhor expressão para designar estes casos?

Vamos fazer algumas considerações a respeito da questão apontada acima. Quando ensinamos a divisão nas séries iniciais utilizamos a expressão “divisão exata” quando queremos nos referir às divisões cujos restos sejam zero. Nesse momento da idade escolar, embora não citamos isso, mas estamos tratando da divisão entre números naturais. Em séries posteriores, utilizamos a expressão “divisibilidade” quando nos referimos a números que podem ser divididos de forma exata por outros (com resto zero) . Observe que a divisão não é fechada em ℕ, já que nos casos em que a divisão não é dita exata, o resultado numérico da mesma não é um número natural.

Quando tratamos de divisibilidade em $\mathbb{Z}$, utilizamos o algoritmo de Euclides, onde é possível se fazer a divisão entre quaisquer inteiros (desde que com divisor não nulo), afinal, a divisão Euclidiana prevê a existência de um inteiro chamado *quociente* e outro inteiro chamado *resto*. Em outras palavras, a divisão é utilizada em $\mathbb{Z}$ e se pensarmos somente no algoritmo de Euclides, divisões de toda forma podem ser feitas ali. Se esquecermos por um momento o Algoritmo de Euclides e imaginarmos a divisão gerando números com virgula (números decimais e dízimas periódicas), percebemos que por um lado a divisão está definida em $\mathbb{Z}$, mas por outro não é fechada em $\mathbb{Z}$, já que o resultado das divisões não é sempre um número inteiro.

Antes de tratarmos da fundamentação rigorosa do conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$), vamos compreender intuitivamente o significado da expressão *classes de equivalência*. Vamos observar um exemplo que vem da Geometria Analítica. De forma rigorosa, primeiro é definido o segmento orientado. Em seguida são definidos os segmentos orientados equipolentes (segmentos que possuem mesmo comprimento, direção e sentido). Dizemos em Geometria Analítica que a relação de equipolência é uma *Relação de Equivalência* no plano cartesiano. Em outras palavras, segmentos orientados equipolentes pertencem a uma mesma classe, chamada *Classe de equivalência*. O que chamamos de *vetor* em Geometria Analítica, nada mais é do que o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento dado, ou ainda, cada vetor é uma classe de equivalência, pois ele representa infinitos outros equipolentes a este.

Trataremos agora do conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$). Este conjunto é construído utilizando as classes de equivalência. De forma bem superficial, isso significa que cada fração $\frac{a}{b}$ é um representante de toda uma classe, a classe das frações que comumente chamamos de “frações equivalentes”. Em outras palavras, o conjunto $\mathbb{Q}$ é o conjunto formado por todas essas classes de equivalência. Interessante perceber que sempre que são usadas classes de equivalência, a noção de elemento do conjunto se amplia, afinal um vetor no plano não é só um dado, mas sim um representante de vários segmentos orientados que são equipolentes a este. Analogamente, uma fração $\frac{a}{b}$ em $\mathbb{Q}$ representa todo um conjunto de frações equivalentes a $\frac{a}{b}$. A partir desta noção são definidas as operações e as relações de ordem. Em $\mathbb{Q}$ temos a importante propriedade de que todo número não nulo tem um inverso, que é um número racional que multiplicado pelo primeiro resulta em 1 (neutro multiplicativo). Esta noção permite, por exemplo, que se encare a divisão em $\mathbb{Q}$ (*a:b)* como uma multiplicação pelo inverso ($a \times b^{-1}$).

Quanto discutimos a divisão no conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$), ela ganha outros contornos. Neste conjunto a divisão entre números racionais pode ser definida como segue:

Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d} \neq \frac{0}{1}$, a divisão $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ pode ser definida pela fração $\frac{ad}{bc}$ **.** Por este ponto de vista, toda divisão em $\mathbb{Q}$ está bem definida e está fechada neste conjunto. Se considerarmos os resultados da divisão como sendo novas frações, pode-se dizer que toda divisão aqui é uma divisão exata. Já quando lecionamos e tratamos dos números racionais, é comum utilizarmos a expressão “decimal exata” para caracterizar os números racionais cuja representação em fração contém potência de dez no seu denominador. Observe ainda que, como o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos Racionais, então a divisibilidade em $\mathbb{Z}$, pode ainda ser imaginada como uma divisão por frações de denominador 1.

Enfim, o que percebe-se é uma mudança no significado da divisão ao longo dos principais conjuntos numéricos e também uma mudança na forma como tratamos do assunto no Ensino Fundamental. É interessante observar estas sutilezas pois a fundamentação matemática de todo essa construção faz com que nenhum conceito fique contraditório com outros.

Se inserirmos agora estes números na reta numérica, ela parecerá bem mais cheia. Será que temos agora algo que podemos chamar de contínuo? Vamos fazer um exercício mental. Imagine a reta numérica composta somente por números inteiros. Agora imagine o conjunto dos números inteiros menores que 5. Esse conjunto tem maior elemento, correto? Imagine o mesmo exercício mas na reta numérica composta por números racionais. Qual é o maior número racional que não ultrapassa o 5?

Ao tentarmos (e não conseguirmos) responder questões como esta última, podemos nos perguntar a respeito do caráter discreto dos números racionais. Afinal, $\mathbb{Q}$ é um conjunto discreto? Outras perguntas importantes: $\mathbb{Q}$ é enumerável? Por quê raramente (ou nunca) este tipo de questionamento faz parte das aulas de Matemática?

Algumas questões podemos responder. Sobre $\mathbb{Q}$ ser ou não ser um conjunto discreto, imagine uma sequência de números racionais que estejam tão próximos de uma fração $\frac{a}{b}$ quanto se queira. Consegue imaginar? Sempre é possível responder positivamente a esta pergunta, portanto, $\mathbb{Q}$ não é um conjunto discreto. Outra maneira de entender esse conceito é observar se é possível se definir o sucessor. Nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ o sucessor está bem claro intuitivamente e bem definido do ponto de vista axiomático. Agora pense: qual o sucessor racional do número racional 1/2? Qual é o "próximo" número racional imediatamente após o ½? Outra pergunta interessante de se fazer em sala de aula: qual é o menor número racional maior que zero?

Diferentemente, no conjunto dos inteiros não é possível utilizar uma sequência de números inteiros que fique tão próxima quanto se queira de outro número inteiro. Por este argumento, concluímos que $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto. Mas $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, ou seja, existe uma função bijetora entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$. Em outras palavras, é possível "contar" os números racionais! O conjunto dos Números Racionais portanto, é dito enumerável mas não é um conjunto discreto.

Um pergunta relevante seria: a reta numérica composta por números racionais (consequentemente inteiros e naturais) é completa? Existem "buracos" na reta numérica composta por números racionais? A resposta a esta última pergunta é sim, afinal, temos os números irracionais que, enfim, "completam" a reta numérica, formando assim o conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$). Note que $\mathbb{R}$ é fechado quanto à adição, multiplicação, potenciação e às suas operações inversas, respectivamente, subtração, divisão e radiciação. Lembre-se que $\mathbb{N}$ só é fechado quanto à adição, multiplicação e potenciação. A análise real ($\mathbb{R}$) apresenta fatos interessantíssimos ("cortes de Dedekind, corpo ordenado completo, há mais irracionais do que racionais?"), mas por estarem além do escopo deste texto, apresentaremos sugestões de literatura para aprofundamento.

Agora, para finalizar, gostaria de fazer algumas perguntas: nossos alunos, ao final do Ensino Fundamental, conseguiriam perceber essas diferenças na divisibilidade sozinhos? Vale a pena questionar os alunos a respeito de conjuntos enumeráveis? Seria interessante discutir conjuntos discretos e contínuos com nossos alunos? Essas e outras questões devem ser feitas. Acredito que essas e outras questões não só podem como devem ser feitas. Buscar o conhecimento e fazer perguntas que valem a pena é importante não só para os estudantes, mas para todos nós, que estamos sempre aprendendo. Sempre que possível, estude mais, conforme-se menos, busque mais, compartilhe mais, duvide mais e se inspire. Inspiração é contagioso.

Sugestões de Leitura

FERREIRA, J., **A Construção dos Números**, Textos Universitários - SBM, Rio de Janeiro - 2010.
FIGUEIREDO, D. G.; **Análise I**, 2a Edição. Livros Técnicos e Centícos Editora, Rio de Janeiro, 1996.

HEFEZ, A.; **Curso de Álgebra**, vol. 1., Coleção MAtemática Universitária, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, 1993

ÁVILA, G. G.; **Análise Matemática para Licenciatura**. 1a Edição. Edgar Blucher, São Paulo, 2001.

BOFF, D.F., **A construção dos números reais na educação básica,** Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática - UFRGS, Porto Alegre, 2006. Disponível em https://goo.gl/DArxYA, Acessado em 21 de março de 2018.

MOSCIBROSKI, T.M.; **A amplitude do conjunto dos números irracionais,** Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática - UFSC, Florianópolis, 2002. Disponível em https://goo.gl/eeYV6S, Acessado em 21 de março de 2018.