nova escola

Resolução da atividade complementar - MAT9_06ALG10

1) **A área do campo de futebol da arena Allianz Parque em São Paulo é um retângulo de 7140 m², e seu perímetro é 346 m. Quais as dimensões desse campo?**

Solução: Indicando por x e y as medidas dos lados do campo de futebol, temos:

Perímetro: x + x + y + y = 2x + 2y
Área: x . y = xy

Com essas duas representações, escrevemos duas equações: 2x+2y=346 e xy=7140. Essas duas equações formam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 346 \\ xy = 7140 \end{cases}$$

Inicialmente, escrevemos y em função x (poderia ser x em função de y):

$$(\div 2) \quad 2x + 2y = 346 \quad (\div 2)$$
$$(-x) \quad x + y = 173 \quad (-x)$$
$$y = 173 - x$$

Substituindo o valor de y na segunda equação, temos:

$$x.(173 - x) = 7140$$
$$173x - x^2 = 7140$$

Portanto, $x^2 - 173x + 7140 = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, encontramos $x_1 = 105$ e $x_2 = 68$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-173) \pm \sqrt{(-173)^2 - 4.1.7140}}{2.1} = \frac{173 \pm \sqrt{29929 - 28560}}{2} = \frac{173 \pm \sqrt{1369}}{2}$$
$$x = \frac{173 \pm 37}{2} \; então \; x_1 = \frac{210}{2} = 105 \quad e \quad x_2 = \frac{136}{2} = 68$$

Substituindo os valores de x, obtemos os valores de y:

$y = 173 - x$	$x_1 = 105$	y = 173 - 105 = 68
	$x_2 = 68$	y = 173 - 68 = 105

Quando x = 105, temos y = 68 e para x = 68, temos y = 105.
Portanto, em qualquer um desses casos, os lados do campo de futebol medem 68 m e 105 m.

2) **A soma dos quadrados de dois números positivos é igual a 58, e a diferença entre o quadrado de um deles e 46, nessa ordem, é igual ao outro número. Quais são esses números?**

Solução: Representando os números desconhecidos por x e y, obtemos as duas equações:

- "A soma dos quadrados de dois números positivos é igual a 58": $x^2 + y^2 = 58$
- "a diferença entre o quadrado de um deles e 46, nessa ordem, é igual ao outro número": $x^2 - 46 = y$

Queremos encontrar os valores de x e y que satisfazem as duas equações, sendo assim temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - 46 = y \end{cases}$$

Na segunda equação, podemos isolar x^2:

$$(+46) \quad x^2 - 46 = y \quad (+46)$$

$$x^2 = y + 46$$

Em seguida, substituímos x^2 por y + 46 na primeira equação:

$$y + 46 + y^2 = 58$$

Temos, então:

$$y^2 + y - 12 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-12)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$y = \frac{-1 \pm 7}{2} \; então \; y_1 = \frac{6}{2} = 3 \;\; e \;\; y_2 = -\frac{8}{2} = -4$$

Como os números devem ser positivos, consideramos y igual a 3. Substituindo o valor de y em $x^2 = y + 46$, encontramos o valor de x:

$$x^2 = 3 + 46 = 49$$

$$x = \sqrt{49}$$

$$x = 7$$

Portanto, os números desconhecidos são 3 e 7.

***Verificação*: $x^2 + y^2 = 58 \Leftrightarrow 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$**

$x^2 - 46 = y \Leftrightarrow 7^2 - 46 = 49 - 46 = 3$

3) [Desafio] Observe o diálogo de Amanda e Júlia:

Júlia, sabe o que eu descobri na aula de Matemática hoje? Que existem dois números cuja soma é 6 e o produto também é 6.

Mas como isso é possível, Amanda? Não acredito nisso não.

➔ **De que forma Amanda pode provar para Júlia que esses números existem? Descubra quais são esses números.**

Solução: Pela fala de Amanda conseguimos escrever duas igualdades cujo resultado seja igual a 6: xy = 6 e x + y = 6, sendo x e y a representação dos dois números citados por ela. Como é preciso encontrar valores que satisfaçam as duas igualdades, temos o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Na primeira equação, podemos isolar o y:

$$y = 6 - x$$

Agora, substituímos y por 6 - x na segunda equação:

$$xy = x.(6 - x) = 6x - x^2 = 6$$

Temos, então:

$$x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

Observe que neste caso $\sqrt{12}$ não é um número natural. Logo, podemos apenas simplificar esse radical fazendo $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$. Por fim, encontramos as raízes:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

Substituindo os valores de x em y = 6 - x, encontramos:

Para $x = 3 + \sqrt{3}$	$y = 6 - (3 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$

Para $x = 3 - \sqrt{3}$	$y = 6 - (3 - \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$

Portando, dois pares ordenados (x,y) são soluções desse sistema:

$$\left\{ \left(3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}\right), \left(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right) \right\}$$

Amanda, pode provar para Júlia que esses números irracionais quando multiplicados ou somados resultam em 6, realizando as operações:

Produto: $\left(3 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9 - 3 = 6$

Soma: $\left(3 - \sqrt{3}\right) + \left(3 + \sqrt{3}\right) = 6$