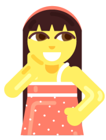
Resolução da Atividade Principal - MAT9_06ALG06

As alunas Ana e Bia resolveram, mentalmente, duas equações quadráticas. Observe as soluções encontradas:

Ana


Hummm... As raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ são $x_1 = 3$ ou $x_2 = 5$.

Bia


No meu caso, as raízes da equação $2x^2 - 6x - 8 = 0$ são $x_1 = 4$ ou $x_2 = -1$.

Marina ficou espantada com a agilidade de suas amigas. Refletiu um pouco e disse:

Acredito que existe uma regularidade envolvendo as raízes e os coeficientes da equação quadrática.

Análise as falas das alunas e responda as questões a seguir:

1) Que regularidade Marina observou que podem ser associadas com o cálculo mental feito por Ana e Bia?

Solução:
Marina diz que observou uma regularidade entre as raízes e os coeficientes da equação. Diante dessa informação, buscamos relacionar esses dados.

Equação resolvida por Ana: $x^2 - 8x + 15 = 0$
Coeficientes da equação: $a = 1$
$b = -8$
$c = 15$

Raízes da equação: $x_1 = 3$ ou $x_2 = 5$

Observe que ao <u>somar</u> as raízes encontramos o oposto do coeficiente **b**.

$x_1 + x_2 = 3 + 5 = 8$

E ao <u>multiplicar</u> as raízes encontramos exatamente o coeficiente **c**.

$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 5 = 15$

Aplicando esse mesmo procedimento na equação resolvida por *Bia*, encontramos:

Equação resolvida por Bia: $2x^2 - 6x - 8 = 0$

Coeficientes da equação: $a = 2$

$b = -6$

$c = -8$

Raízes da equação: $x_1 = 4$ ou $x_2 = -1$

Nesta equação, ao <u>somar</u> as raízes encontramos a metade do oposto do coeficiente **b**.

$x_1 + x_2 = 4 + (-1) = 3$

E ao <u>multiplicar</u> as raízes encontramos a metade do coeficiente **c**.

$x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Analisando o único coeficiente que ainda não foi considerado (coeficiente **a**), observa-se que na primeira equação o coeficiente **a** é igual a 1 e na segunda equação o coeficiente **a** é igual a 2. O que faz com que consideremos esse o motivo de os cálculos de soma e produto da segunda equação ficassem com os valores pela metade dos coeficientes considerados (b ou c). Sendo assim, para corrigir esta diferença e considerar a mesma operação em ambas equações, dividimos o coeficiente analisado (b ou c) pelo coeficiente **a**.

Portanto, em ambos os casos conseguimos relacionar a **soma** das raízes com o oposto do coeficiente **b** dividido por **a**:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

E o **produto** das raízes com o coeficiente **c** dividido por **a**:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Considerando que *Ana* e *Bia* sabia dessas relações, elas podem ter encontrado as raízes da equação através do resultado da soma e o produto após analisarem os coeficientes da equação.

2) Sabe-se pela fórmula resolutiva da equação quadrática que encontramos as raízes x_1 e x_2 calculando:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$$

Utilize essa informação para provar as observações feitas na atividade anterior.

Solução:
Como na atividade **1** foram feitas considerações sobre a **soma** e o **produto** das raízes, faremos essas mesmas operações com as raízes a partir da fórmula resolutiva para provar que a conclusão obtida anteriormente está correta para qualquer que seja a equação quadrática.

- Soma das Raízes x_1 e x_2

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\triangle} - b - \sqrt{\triangle}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

- Produto das Raízes x_1 e x_2

$$x_1 .\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} . \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\triangle}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1 .\ x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Portanto, as relações de soma e produto com os coeficientes da equação podem ser aplicadas em todas as equações quadráticas.