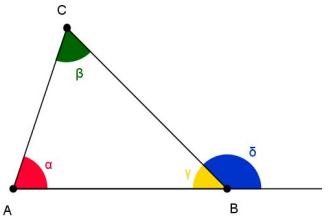
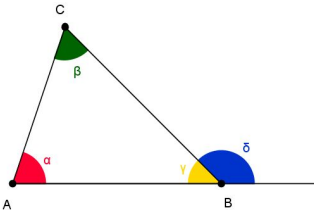
Resolução da atividade complementar - MAT8_15GEO10

1) O Teorema do ângulo externo, diz que em todo triângulo a medida de um ângulo externo equivale à soma das medidas dos ângulos internos, não adjacentes a ele.
Você encontrará os parágrafos e as imagens da demonstração deste teorema fora de ordem e deverá analisá-los para colocar a numeração correta (de 1 a 5) para tornar o texto coerente.

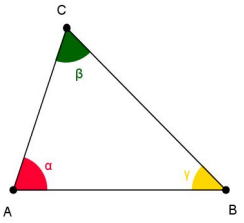
( ) **Como mostramos que 180º - γ = δ e, ao mesmo tempo, 180º - γ = α + β, podemos concluir que**
δ = α + β



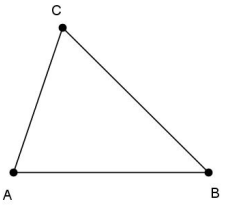
( ) **Como os ângulos com vértice em B destacados formam um ângulo raso, podemos afirmar que γ + δ = 180º, ou seja, δ = 180º - γ.**



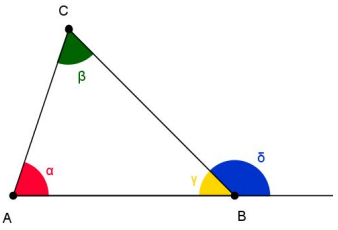
( ) **Como o triângulo ABC é retângulo, sabemos que a soma de seus ângulos internos é igual a 180º. Considerando m(∡BAC) = α, m(∡QRT) = β e m(∡TQR) = γ, temos:**
α + β + γ = 180º, ou seja, α + β = 180º - γ



( ) **Considere ABC um triângulo qualquer.**



( ) **Trace a semirreta que tem origem em A e passa por B e chame de δ o ângulo externo ao triângulo que tem vértice em B.**



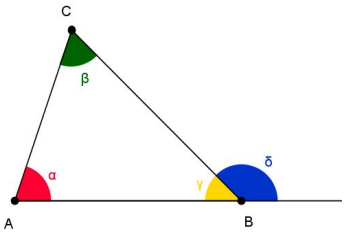
Associação Nova Escola © 2017 - Todos os direitos reservados

Resolução:

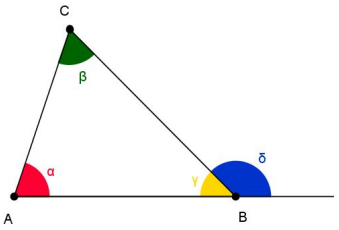
Para resolver essa atividade, o aluno precisa notar seu início deve conter um triângulo genérico (parágrafo da 4ª linha). Depois precisará notar que a propriedade sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser usada nesse caso (parágrafo da 2ª linha). Em seguida, precisará destacar um ângulo externo, uma vez que o Teorema estabelece uma relação entre ângulos internos e externos (parágrafo da 5ª linha) e precisará verificar como esse ângulo externo e o ângulo interno adjacente se relacionam (parágrafo da 2ª linha). Por fim, é preciso concluir a demonstração, usando as relações obtidas para os ângulos internos e para o ângulo externo e seu adjacente (parágrafo da 1ª linha).

(5) Como mostramos que 180º - **γ** = **δ** e, ao mesmo tempo, 180º **- γ = α + β**, podemos concluir que

δ = α + β

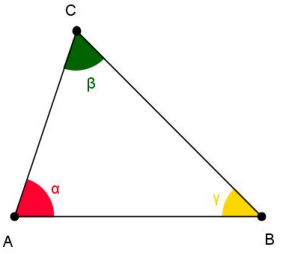


(4) Como os ângulos com vértice em B destacados formam um ângulo raso, podemos afirmar que **γ + δ** = 180º, ou seja, **δ** = 180º - **γ**.

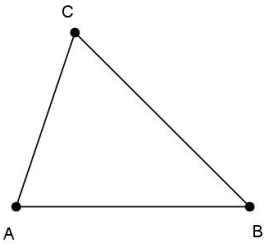


(2) Como o triângulo ABC é retângulo, sabemos que a soma de seus ângulos internos é igual a 180º. Considerando **m(∡BAC) = α**, **m(∡QRT) = β** e **m(∡TQR) = γ**, temos:

α + β + γ = 180º, ou seja, **α + β = 180º - γ**

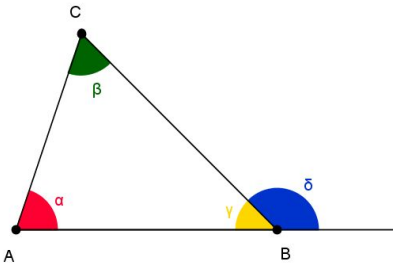


(1) Considere ABC um triângulo qualquer.



Associação Nova Escola © 2017 - Todos os direitos reservados

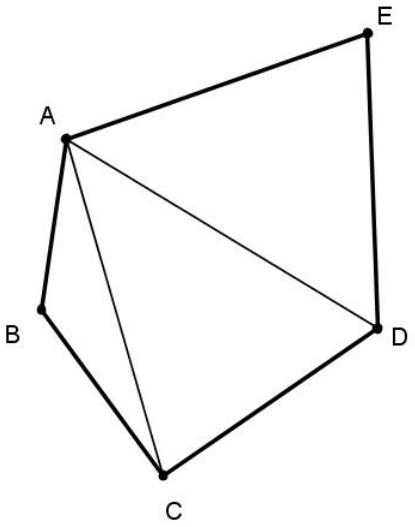
(3) Trace a semirreta que tem origem em A e passa por B e chame de **δ** o ângulo externo ao triângulo que tem vértice em B.



2) Demonstre que a soma dos ângulos internos de todo pentágono é igual a 540º.

Resolução:

Seja ABCDE um pentágono qualquer. Trace as diagonais AC e AD, determinando os triângulos ABC, ACD e ADE.

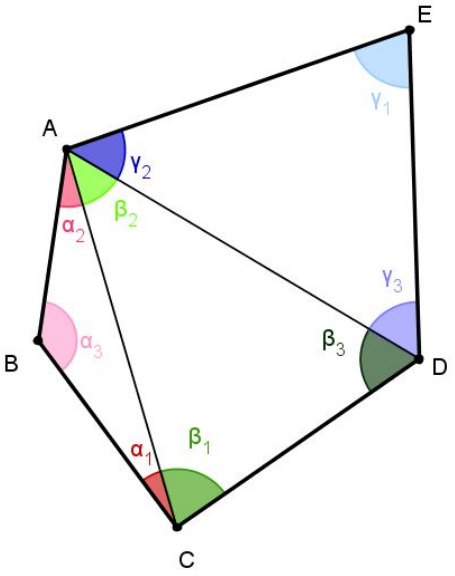


Considere as nomenclaturas dos ângulos destacados, como mostrado na imagem. Como ABC, ACD e ADE são triângulos, sabemos que a soma das medidas de seus ângulos internos é 180º, ou seja,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^\circ$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 180^\circ$$



Associação Nova Escola © 2017 - Todos os direitos reservados

Observe que o ângulo ∡DCB do quadrilátero é composto pelos ângulos α_1 e β_1, o ângulo ∡EDC do quadrilátero é composto pelos ângulos β_3 e γ_3 o ângulo ∡BAE é composto pelos ângulos α_2, β_2 e γ_2. Então, a soma dos ângulos internos de ABCD é

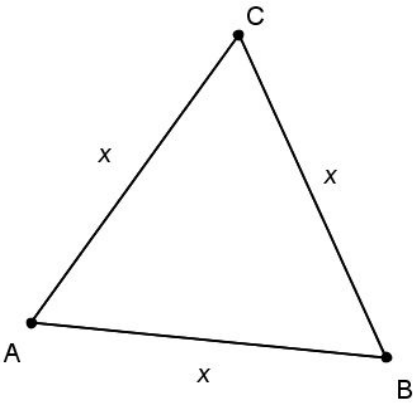
$m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle BAE) + m(\measuredangle AED) + m(\measuredangle EDC) + m(\measuredangle DCB) =$

$\alpha_3 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 + \alpha_1 + \beta_1 =$

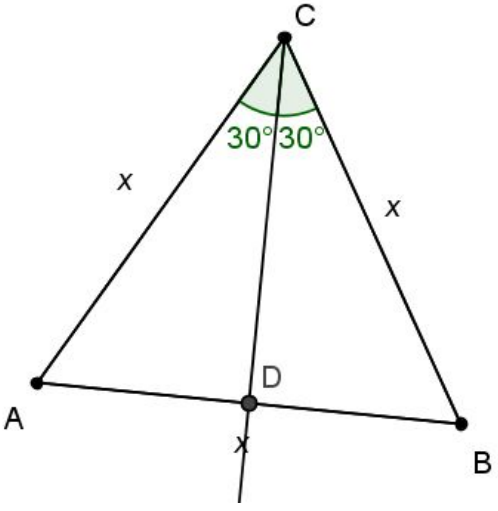
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 180^o + 180^o + 180^o = 540^o.$

Desafio
3)Demonstre que em todo triângulo equilátero a bissetriz de um ângulo interno contém à altura relativa ao lado oposto a esse ângulo.

Resolução:
Seja ABC um triângulo equilátero e considere x a medida de seus lados.



Trace a bissetriz do ângulo ACB, dividindo esse ângulo em dois ângulos de 30º (o ângulo ACB mede 60º porque o triângulo ABC é equilátero). Nomeie de D o ponto de interseção da bissetriz e do lado AB.



*Como os triângulos ACD e BCD possuem dois lados de mesma medida (AC = BC = x, e CD é comum) e um ângulo de 30º entre esses lados, pelo caso **LAL** podemos garantir*

Associação Nova Escola © 2017 - Todos os direitos reservados

que esses triângulos são congruentes.
Com isso, garantimos que os ângulos CDA e BDC são congruentes. Como esses dois ângulos juntos formam um ângulo raso, cada um mede 90º, provando que AD é altura.

Então, como o segmento $\overline{AD}$ *está contido na semirreta* $\overrightarrow{AD}$*, concluímos que a bissetriz do ângulo contém a altura relativa ao lado oposto a esse ângulo.*

Como esse triângulo é equilátero, o mesmo argumento pode ser usado para provar que esta propriedade também vale para as bissetrizes dos outros dois ângulos internos do triângulo.

Associação Nova Escola © 2017 - Todos os direitos reservados