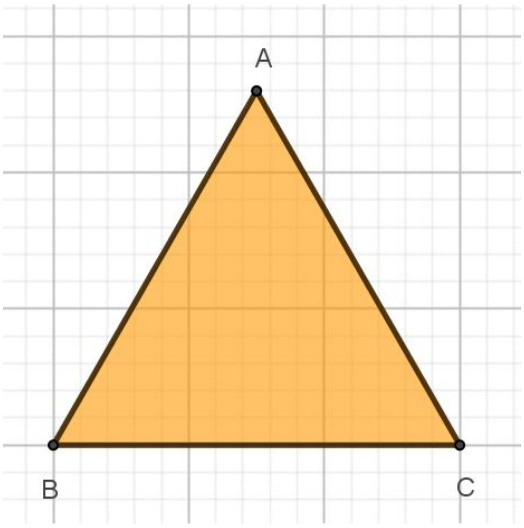
Resolução da Atividade Principal_MAT9_15GEO06

Deduzindo o comprimento da altura de um triângulo equilátero:

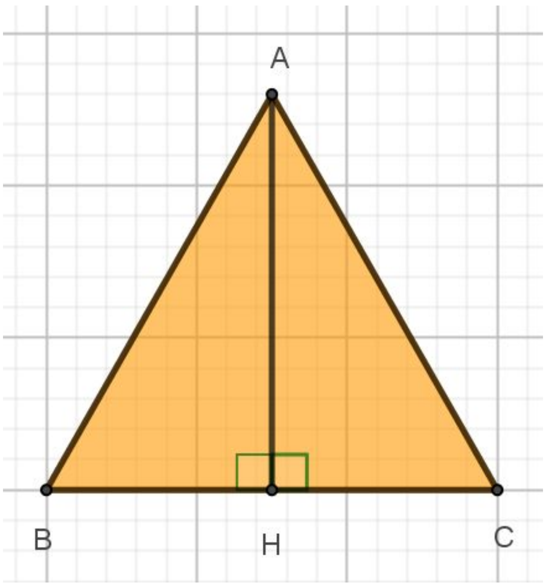
Observe o triângulo equilátero a seguir:



a) **Trace, com auxílio de régua e esquadro,o segmento AH, altura relativa ao lado BC.**

Resolução:

*A figura seguinte mostra o segmento AH, altura do triângulo **ABC**, correspondente ao lado **BC**.*

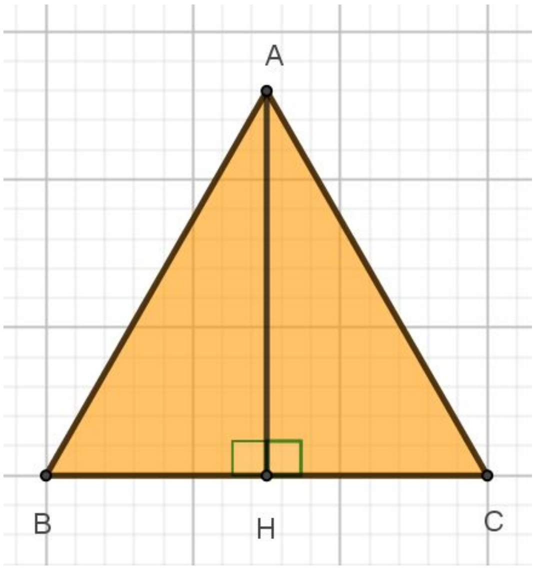


b) O que se pode afirmar em relação aos triângulos ABH e ACH ? Por quê?

Resolução:

Espera-se que os alunos concluam que os triângulos ***ABH*** *e* ***ACH*** *são congruentes. Tal fato se justifica pelo caso* ***LAL*** *ou pelo caso* ***LLL****. Neste último, os alunos poderão usar o fato de que a altura divide o lado* ***BC*** *do triângulo em dois segmentos iguais, ou seja, o ponto* ***H*** *é ponto médio de* ***BC****.*

c) Como você calcularia a altura AH deste triângulo?



Resolução:
Pela figura, sabendo que ***AB=BC=CA= 3*** *unidades e que* ***BH=BC= 3/2*** *e fazendo* ***AH=h****, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH, por exemplo, temos:*

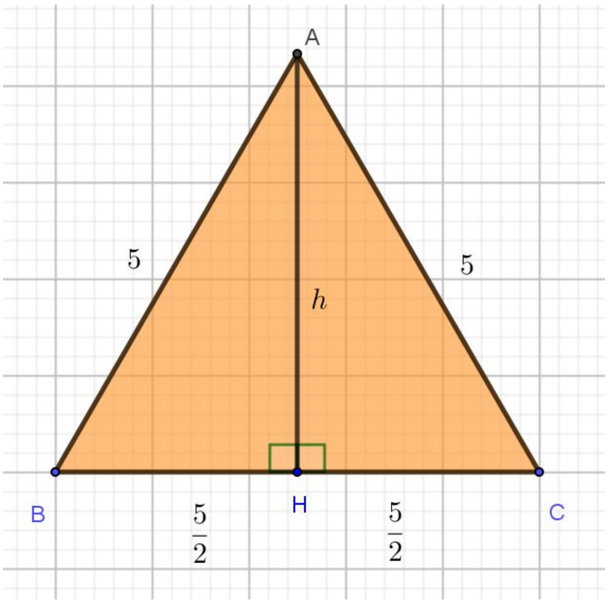
$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow \quad 3^2 = (3/2)^2 + h^2$

$9 = \frac{9}{4} + h^2 \Rightarrow \quad 9 - \frac{9}{4} = h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{36-9}{4} \Rightarrow \quad h^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow$
$h = \sqrt{\frac{27}{4}} \Rightarrow \quad h = \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \quad h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

d) Na figura seguinte temos um triângulo equilátero com lado medindo 5 unidades. Qual será a medida da altura h desse triângulo?

Resolução:

A figura seguinte destaca as medidas do triângulo após traçada a altura ***AH=h****.*



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ***CHA****, temos:*

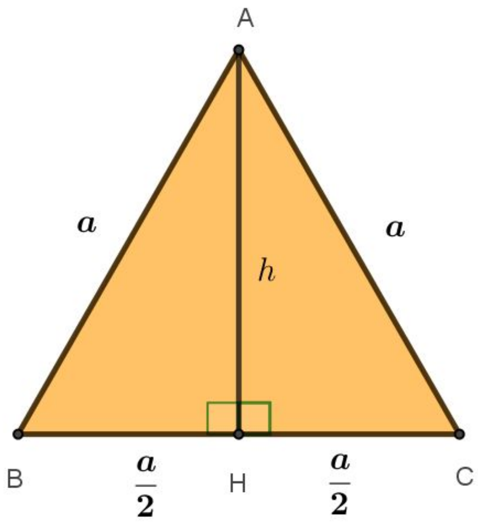
$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + (\tfrac{5}{2})^2 \Rightarrow h^2 + \tfrac{25}{4} = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = 25 - \tfrac{25}{4} \Rightarrow h^2 = \tfrac{100-25}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \tfrac{75}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\tfrac{75}{4}} \Rightarrow h = \tfrac{5\sqrt{3}}{2}$$

e) Baseado nos dois casos anteriores, diga como se relacionam a medida do lado do triângulo equilátero e sua altura h.

Resolução:

Espera-se que os alunos percebam, após os cálculos das alturas dos dois triângulos, que a medida da altura ***h*** *pode ser obtida multiplicando a medida* ***a*** *do lado do triângulo equilátero pela metade de* $\sqrt{3}$ *.*

f) Usando o procedimento anterior, ache um modelo matemático que generalize a relação entre o comprimento h, da altura e a medida do lado a, de um triângulo equilátero qualquer.



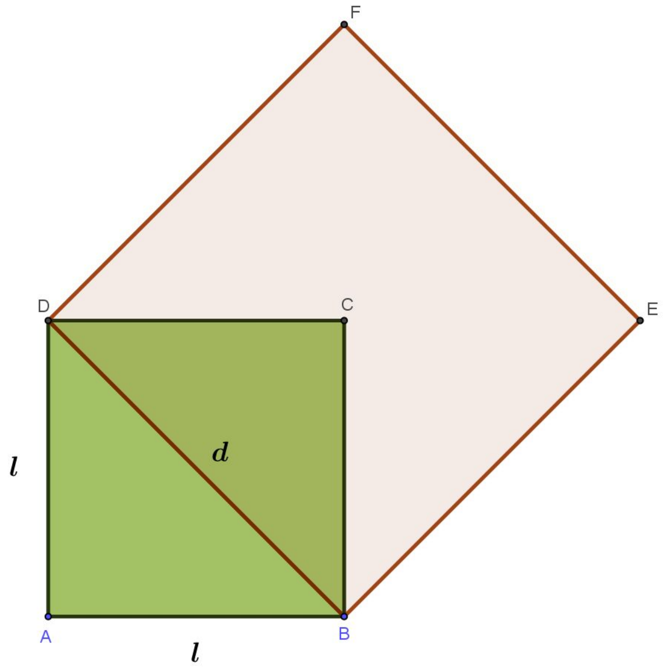
Resolução:

*Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo **ABH**, temos:*

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow a^2 = (a/2)^2 + h^2$$
$$a^2 = \frac{a^2}{4} + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Deduzindo o comprimento da diagonal d de um quadrado de lado medindo l :

Na figura abaixo temos um quadrado ABCD de lado l e diagonal BD = d e um quadrado maior, construído sobre a diagonal.



a) **Quanto medirá a diagonal quando a medida do lado for de 5 cm?**

Resolução:

*Espera-se aqui que os alunos possam perceber que a diagonal do quadrado **ABCD** é também a hipotenusa do triângulo retângulo **ABD** e concluir que a medida da mesma é obtida através da aplicação direta do teorema de Pitágoras no triângulo **ABD**, conforme resolução abaixo:*

$5^2 + 5^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 25 + 25 \Rightarrow$

$d^2 = 50 \Rightarrow d = \sqrt{50} \Rightarrow$

$d = \sqrt{2.\,25} \Rightarrow d = 5\sqrt{2}$

b) **Qual será a medida do lado quando a diagonal medir $3\sqrt{2}$ cm?**

Resolução:

De forma análoga, espera-se que os alunos percebam que temos aqui uma aplicação direta do teorema de Pitágoras:

$l^2 + l^2 = d^2 \Rightarrow 2l^2 = d^2 \Rightarrow$

$2l^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2l^2 = 9.2 \Rightarrow$

$2l^2 = 18 \Rightarrow 2l^2 = 18 \Rightarrow$

$l^2 = \frac{18}{2} \Rightarrow l^2 = 9 \Rightarrow$

$l = \sqrt{9} \quad \Rightarrow l = 3$

c) **Vocês perceberam alguma relação entre a medida do lado e a medida da diagonal do quadrado, nos dois exemplos anteriores? Será que essa relação se mantém sempre?**

Resolução:

Espera-se que após a solução dos dois questionamentos anteriores os alunos percebam a relação de dependência entre a medida do lado do quadrado e sua diagonal, onde a medida da diagonal é obtida de forma direta pelo produto da medida do lado l *por* $\sqrt{2}$.

d) **Usando os fatos anteriores, deduza uma relação entre a diagonal d e a medida** l **do lado do quadrado ABCD.**

Resolução:

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, vem:

$$l^2 + l^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad 2l^2 = d^2 \quad \Rightarrow$$
$$d^2 = 2l^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{2l^2} \quad \Rightarrow d = l\sqrt{2}$$