Resolução da Atividade Principal - MAT8_04NUM02

Você nunca deve ter ouvido falar, mas em algum lugar da Terra, existe um país muito interessante e especial chamado ***"República Investigativa dos Conjuntos Numéricos"***. O presidente desse país, Senhor Denominador Comum da Silva, visando ampliar os investimentos públicos na educação, solicitou ao Instituto de Estatística do país um levantamento de alguns dados sobre a população de duas cidades: Decimópolis e Fracionópolis.

Os habitantes de Fracionópolis usam apenas a forma fracionária para expressar números, quantidades e medidas. Já os habitantes de Decimópolis preferem usar números decimais para estes fins.

(A) Cada técnico do Instituto de Estatística, ao entrevistar uma pessoa, deve preencher o relatório da PESQUISA, seu pagamento está condicionado a essa entrega. Recebe-se o valor de C$# $\frac{9}{2}$ (C$# símbolo de Cardinal, a moeda desse país), para cada relatório preenchido, caso o técnico seja de Fracionópolis e C$# 4,50 se for de Decimópolis. Os relatórios preenchidos parcialmente são aceitos em alguns casos, mediante análise do supervisor.

- Um técnico de Fracionópolis entregou em um dia $\frac{28}{3}$ de relatórios. Quantos relatórios inteiros e quantos relatórios parciais foram entregues? Quanto foi seu ganho em cardinais nesse dia?
- Se um técnico de Decimópolis recebeu em um dia C$# 85,50, quantos relatórios concluiu neste dia? O valor pago por relatório a um técnico de Decimópolis é maior ou menor que o pago a um técnico de Fracionópolis?

(B) Um técnico do Instituto de Estatística que mora e trabalha em Fracionópolis consegue entrevistar os moradores de uma rua que mede $2\frac{1}{4}$ quilômetros em $\frac{4}{5}$ horas. Quantos quilômetros dessa rua em média, ele pode percorrer por hora?

Resolução:

a)

- O técnico em questão preencheu **nove relatórios inteiros e mais um terço** de um relatório. Observe: $9\frac{1}{3} = 9 + \frac{1}{3} = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$

Inicialmente, analisaremos a seguinte recorrência:

1 relatório: $1 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ ou seja, C$# $4\frac{1}{2}$

2 relatórios: $2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \frac{9+9}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ou seja, C$# 9

3 relatórios: $3 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \frac{9+9+9}{2} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$ ou seja, C$# $13\frac{1}{2}$

$\frac{28}{3}$ de relatórios: $\frac{28}{3} \times \frac{9}{2} =?$ Então, como somar $\frac{28}{3}$ de parcelas de $\frac{9}{2}$?

Precisaremos representar visualmente essa situação para entender melhor seu significado!

Vamos começar pensando em **multiplicar nove meios por um terço:**

Como o fator $\frac{1}{3}$ é uma fração própria, indica que queremos obter uma parte menor que o inteiro. A figura abaixo representa nove meios, cada parte unitária vale um meio.

1 inteiro

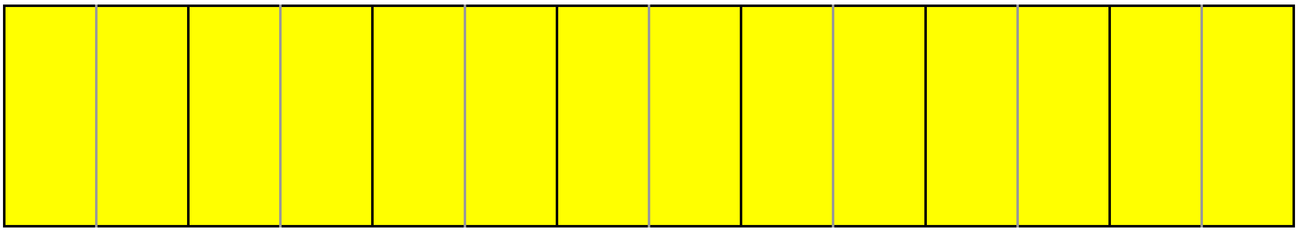
½	**½**	**½**
½	**½**	**½**
½	**½**	**½**

Note que a coluna amarela representa $\frac{1}{3}$ de $\frac{9}{2}$ (perceba que é uma parte menor que os nove meios), logo, $\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$

Mas nosso objetivo é calcular $\frac{28}{3} \times \frac{9}{2}$, já sabemos que $\frac{1}{3}\ de\ \frac{9}{2}$ é $\frac{3}{2}$, portanto, basta multiplicarmos esse valor por 28, ou seja, somamos 28 parcelas de $\frac{3}{2}$, confira isso visualmente:

1 inteiro

½		**1 inteiro**										
½	$\frac{3}{2}$	**1 inteiro**										
½		**1 inteiro**										



Percebemos que cada 2 pedacinhos de três meios, representam 3 inteiros, e temos 14 conjuntos de 2 partes valendo três meios cada uma, que por sua vez, representam 3 inteiros então, podemos fazer 14 x 3 = 42.
Concluímos que $\frac{28}{3} \times \frac{9}{2} = 42$
Portanto, neste dia, o técnico recebeu C$# 42,00 por seu trabalho.

- Se um técnico de Decimópolis recebeu em um dia C$# 85,50, quantos relatórios concluiu neste dia? O valor pago por relatório a um técnico de Decimópolis é maior ou menor que o pago a um técnico de Fracionópolis?

Resolução:

Neste caso, podemos pensar em quantos conjuntos de 4,5 cabem dentro de 85,5.

Numericamente, ao dividirmos decimais, normalmente usamos o seguinte algoritmo:

$85,5 \div 4,5$ como temos o mesmo número de casas decimais, eliminamos as vírgulas e fazemos $855 \div 45 = 19$. Vamos explorar a ideia por trás dessa regra, é importante entender a regra antes de usá-la.

Começaremos revisitando o conceito de número racional:

$Q = \{x |\ x = \frac{a}{b} com\ a \in Z,\ b \in Z\ e\ b \neq 0\}$ ou seja, numerador e denominador de um racional, quando na forma de fração, segundo a definição, devem conter apenas números inteiros.
Pela definição de racional fracionário, interpretarmos a referida divisão da seguinte forma:

$$85,5 \div 4,5 = \frac{85,5}{4,5} = \frac{85,5 \times 10}{4,5 \times 10} = 855 \div 45$$

Portanto, C$# 85,50 é o pagamento que se recebe ao entregar 19 relatórios preenchidos.

Note que C$# 4,50 é o mesmo que quatro inteiros mais um meio:

$4,5 = 4 + 0,5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$

Logo, o valor pago por relatório é igual nas duas cidades.

b)

Resolução

Primeiro, vamos transformar o número misto $2\frac{1}{4}$ em uma fração imprópria

1 inteiro	+	1 inteiro	+	$\frac{1}{4}$

(-- $2\frac{1}{4}$ ----------------------------------)

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	+	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	+	$\frac{1}{4}$

(-- $\frac{9}{4}$ ----------------------------------)

Numericamente, podemos somar os valores usando o algoritmo para adição de frações:

$$1+1+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}=\frac{8}{4}+\frac{1}{4}=\frac{8+1}{4}=\frac{9}{4}$$

Então, vemos que o técnico percorre $\frac{9}{4}$ de quilômetros em $\frac{4}{5}$ de horas.

Como queremos saber quantos quilômetros dessa rua em média, ele pode percorrer por hora, basta dividirmos a quantidade de quilômetros pela quantidade de horas: $\frac{9}{4} \div \frac{4}{5}$ ou seja, nos perguntando: **"Quantos conjuntos de $\frac{4}{5}$ cabem em $\frac{9}{4}$?"**

¼	¼	¼	¼	¼	¼	¼	¼	¼

⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	⅕	?

Visualmente, observamos que dentro de nove quartos cabem 2 partes de quatro quintos mais três partes de um quinto mais um pedaço que não conhecemos o valor. Esse pedaço é a diferença entre $\frac{9}{4}$ e a soma $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$:

$$\frac{9}{4}-\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{9}{4}-\frac{11}{5}=\frac{45}{20}-\frac{44}{20}=\frac{1}{20}$$

Portanto, em nove quartos, cabem duas partes de quatro quintos mais três partes de um quinto mais uma parte de um vinte avos.

$$\frac{9}{4}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{20}=\frac{16+16+12+1}{20}=\frac{45}{20}$$

Vamos considerar cada célula da tabela abaixo como sendo $\frac{1}{20}$ e como teremos 45 células dessas, a tabela equivale a $\frac{9}{4}$, queremos dividi-la em partes de $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$, ou seja, dividir $\frac{9}{4}$ por $\frac{4}{5}$ equivale a dividir $\frac{45}{20}:\frac{16}{20}$

$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Abaixo, dividimos a figura em tantas partes quantas possíveis de $\frac{16}{20}$:

Uma parte de $\frac{16}{20}$	Uma parte de $\frac{16}{20}$	$\frac{1}{4} de \frac{16}{20}$
$\frac{1}{4} de \frac{16}{20}$	$\frac{1}{4} de \frac{16}{20}$	$\frac{1}{16}$

Obtemos 2 conjuntos de $\frac{16}{20}$, mais tres partes de $\frac{1}{4}$ de um conjunto de $\frac{16}{20}$, mais uma parte de $\frac{1}{16}$, somando, temos:

$$1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{16} = \frac{32}{16} + \frac{12}{16} + \frac{1}{16} = \frac{32+12+1}{16} = \frac{45}{16}$$

Portanto: $\frac{9}{4} \div \frac{4}{5} = \frac{45}{20} \div \frac{16}{20} = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{16} = \frac{32}{16} + \frac{12}{16} + \frac{1}{16} = \frac{32+12+1}{16} = \frac{45}{16}$

Através da solução usando representação visual, podemos, pensar em algumas soluções numéricas para o problema:

a) Usando o algoritmo da divisão de naturais, que com toda certeza, serve para frações, lembre-se **"número é número, não importa como está escrito".**

- Vamos encontrar um quociente ***a***, resultado da divisão exata entre $\frac{9}{4}$ e $\frac{4}{5}$:
  $\frac{9}{4} \div \frac{4}{5} = a$, então, $\frac{9}{4} = a \cdot \frac{4}{5}$ pois o dividendo é dado pelo produto do quociente pelo divisor em qualquer divisão exata.

- Aplicando a propriedade fundamental das proporções temos:

$$a = \frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 4} = \frac{45}{16}$$

b) Também podemos analisar a solução através de divisão de frações com os denominadores iguais, pois representam partes iguais de um todo.
$\frac{9}{4} \div \frac{4}{5} = \frac{45}{20} \div \frac{16}{20} = 45 \div 16 = \frac{45}{16}$.

c) Se quisermos usar alguma propriedade compensatória, podemos cancelar o divisor, multiplicando-o pelo seu inverso, para fazermos a compensação necessária, multiplicamos o dividendo pela mesma fração:

$$\frac{9}{4} \div \frac{4}{5} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{45}{16}}{1} = \frac{45}{16}$$

Observação: O resultado $\frac{45}{16}$ equivale ao número misto $2\frac{13}{16}$. Esta representação pode ser verificada visualmente na figura:

$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Neste caso, $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{20}$ representam partes iguais, de inteiros diferentes.