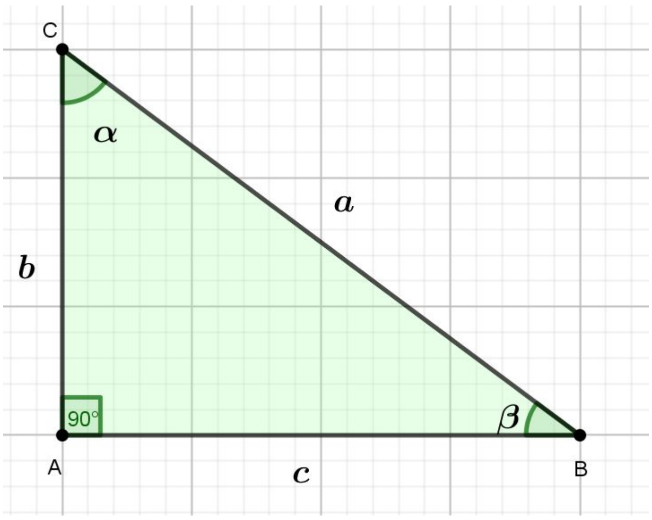
Resolução da Atividade Principal - MAT9_15GEO02

Na aula de hoje vamos mostrar que existe uma relação entre a medida **a**, da hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer, e as medidas **b** e **c** , de seus respectivos catetos. Veja a figura abaixo, que mostra tais elementos do triângulo retângulo. Quais segmentos representam os catetos ? Qual a medida de cada um?



Solução do questionamento:

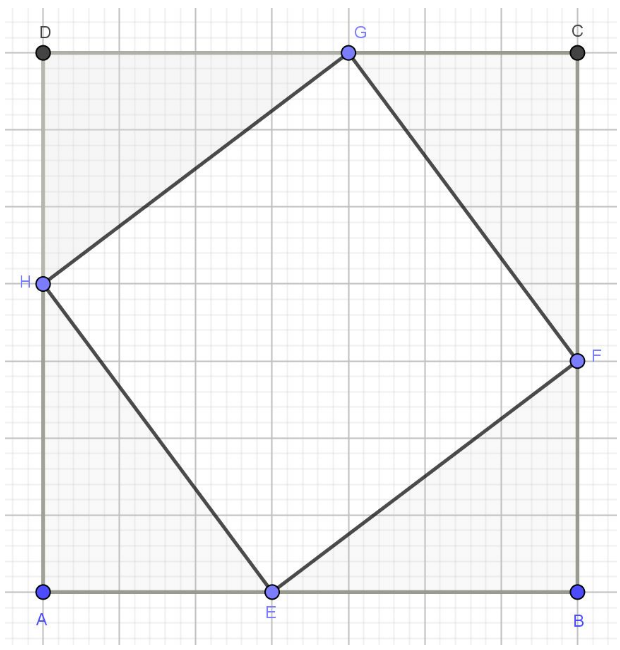
Espera-se que os alunos percebam que, apesar de não ser atribuída uma medida padrão, pode-se estabelecer como unidade a distância entre duas malhas consecutivas. Dessa forma, a solução esperada será:

AB e AC são os catetos e BC é a hipotenusa.

$\overline{AB}$ = *c* = *4 unidades*
$\overline{AC}$ = *b* = *3 unidades*

Nossa primeira atividade se resume em deduzir uma relação entre as medidas **a**, **b** e **c**, respectivamente hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo, usando malhas quadriculadas, lápis e régua. Para tanto, vamos utilizar um triângulo retângulo de catetos medindo 3 e 4 unidades respectivamente. Siga as orientações abaixo:

- Numa malha quadriculada, construa um quadrado ABCD de lado medindo 7 unidades.
- A partir do vértice A, marque 4 pontos (E, F, G e H) distantes 3 unidades de cada vértice no sentido anti-horário.
- Trace os segmentos EF, FG, GH e HE obtendo o quadrilátero EFGH. A figura abaixo é uma mostra do que espera ser construído pelos alunos:



- Mostre que os triângulos HAE, EBF, FCG e GDH são congruentes.

Solução:

Espera-se que os alunos percebam a congruência entre os triângulos pelo caso LAL (lado, ângulo, lado), uma vez que todos os triângulos possuem catetos de medida 3 e 4 unidades respectivamente, e o ângulo entre eles iguais (90º).

- Qual a medida dos ângulos internos do quadrilátero EFGH? Este quadrilátero é um quadrado?

Solução:

A congruência dos triângulos garante a igualdade de seus ângulos. Como os ângulos alfa e beta são ângulos de um triângulo retângulo, são complementares. Dessa forma, espera-se que os alunos concluam que o ângulo interno do quadrilátero EFGH vale 90º.

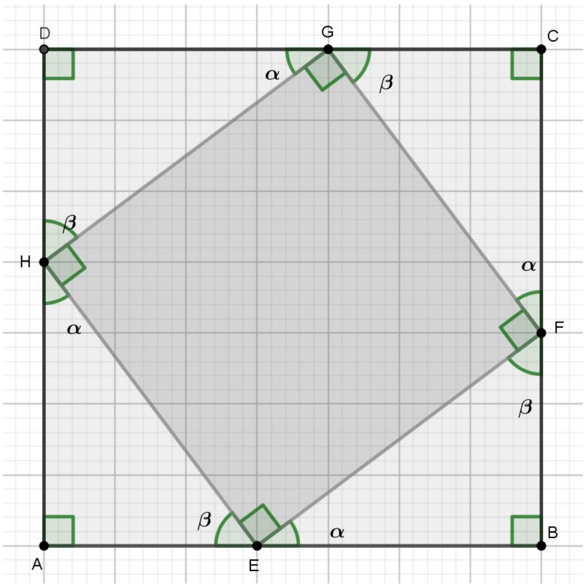
Uma solução algébrica:

Pela figura, temos que $\alpha + \beta + H\widehat{E}F$ *=180º (i). Como* $\alpha + \beta$ *= 90º (ii), então, substituindo (ii) em (i), temos:*

$$\alpha + \beta + H\widehat{E}F = 180^\circ \rightarrow 90^\circ + H\widehat{E}F = 180^\circ \rightarrow H\widehat{E}F = 180^\circ - 90^\circ \rightarrow H\widehat{E}F = 90^\circ$$

Como os ângulos HÊF, EFG, FGH e GHE são todos iguais a 90° e, pela congruência dos triângulos HE=EF=FG=GH, o quadrilátero EFGH é um quadrado.

- A figura seguinte mostra o que se espera que os alunos apresentem na construção da solução:



- Qual a área ocupada pelos triângulos HAE, EBF, FCG e GDH ?

Solução:

A congruência dos triângulos garante a igualdade das áreas. Dessa forma, basta calcular a área de um deles. Pelo triângulo HAE, vem:

$$S(HAE) = \frac{4\,.\,3}{2} = 6u^2$$

onde $S(HAE)$ *representa a área do triângulo HAE.*

Dessa forma, a área total ocupada pelos triângulos HAE, EBF, FCG e GDH será:
4 x 6 u² = 24 u²

- Sabendo que $(3 + 4)^2 = 3^2 + 2.3.4 + 4^2$ e usando a composição de áreas, determine a área do quadrilátero EFGH estabelecendo uma relação entre as medidas **a**, **b** e **c**, respectivamente hipotenusa e catetos do triângulo retângulo HAE ?

Solução:

Usando indicação de composição de áreas, pode-se escrever a área do quadrado ABCD, como a soma das áreas dos 4 triângulos congruentes com o quadrado interno EFGH, da seguinte forma:

A_1 = área do quadrado ABCD

A_2 = área de um dos triângulos congruentes de base medindo 3u e altura medindo 4 u, respectivamente.

*A_3 = Área do quadrado EFGH, de lado medindo **a** unidades (hipotenusa do triângulo HAE)*

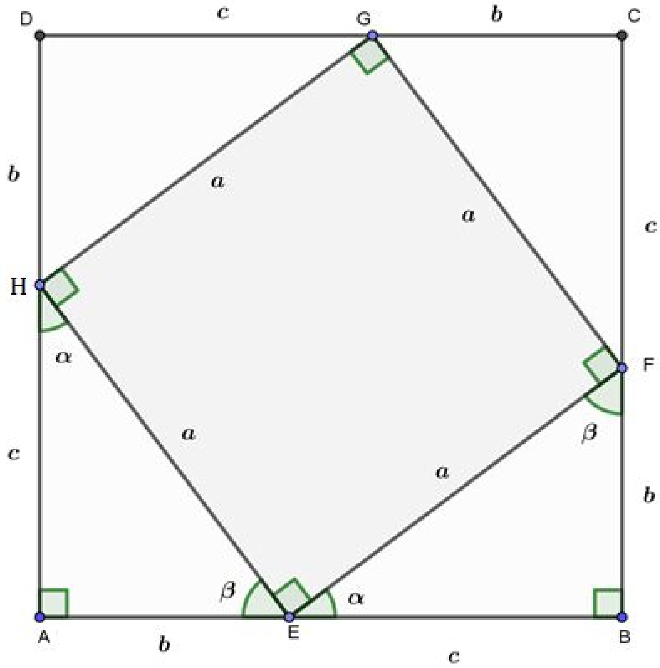
Por composição de áreas temos:

$$A_1 = 4.\ A_2 + A_3$$
$$(3+4)^2 = 4.\frac{3.4}{2} + a^2$$
$$3^2 + 2.3.4 + 4^2 = 2.3.4 + a^2$$
$$3^2 + 4^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 3^2 + 4^2$$

Nossa segunda atividade será mostrar que a relação estabelecida anteriormente é válida para todo e qualquer triângulo retângulo.

Usando a figura seguinte e o raciocínio desenvolvido na resolução anterior, mostre que a relação **$a^2 = b^2 + c^2$** é válida para todo e qualquer triângulo retângulo:

Sugestões: Qual a medida do lado e área do quadrado ABCD?
Qual a área do quadrado EFGH? Qual a área dos 4 triângulos?



Solução esperada:

Pelo que foi desenvolvido na atividade anterior, espera-se que os alunos percebam a relação entre as duas soluções, uma vez que agora somente irá algebrizar a solução numérica anterior, generalizando a relação deduzida.

*A_1 = área do quadrado ABCD de lado medindo (**b+c**) unidades*
*A_2 = área de um dos triângulos congruentes de base medindo **b** e altura medindo **c**, respectivamente.*
*A_3 = Área do quadrado EFGH, de lado medindo **a** unidades (hipotenusa do triângulo HAE)*

$$A_1 = 4.\ A_2 + A_3$$
$$(b+c)^2 = 4.\frac{b.c}{2} + a^2$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = 4.\frac{b.c}{2} + a^2$$
$$b^2 + 2b.c + c^2 = 2b.c + a^2$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

Outra solução:

Os alunos podem apresentar uma solução partindo da área do quadrado EFGH, escrevendo-a como a diferença entre as áreas do quadrado ABCD e dos quatro triângulos equiláteros:

$$A_3 = A_1 - 4.\ A_2$$
$$a^2 = (b+c)^2 - 4.\frac{b.c}{2}$$
$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$